

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL - FACULTÉ DES SCIENCES

Les relations caractéristiques des bases du groupe symétrique

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Neuchâtel
pour obtenir le titre de docteur ès sciences

par

ANDRÉ CALAME

licencié ès sciences mathématiques

Les relations caractéristiques
des bases du groupe symétrique

Imprimé en Suisse

Les relations caractéristiques des bases du groupe symétrique

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Neuchâtel
pour obtenir le titre de docteur ès sciences

par

ANDRÉ CALAME

licencié ès sciences mathématiques



UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

FACULTÉ DES SCIENCES

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel sur le rapport de Mademoiselle et Messieurs les professeurs PICCARD, BAYS et BADER autorise l'impression de la présente thèse sans exprimer d'opinion sur les propositions qui y sont contenues.

Neuchâtel, 9 juillet 1955.

Le Doyen:

Prof. Dr R. CHABLE.

A Mademoiselle S. Piccard

A ma femme

I. INTRODUCTION

On sait que le groupe symétrique de degré n peut être défini sous forme abstraite par deux éléments générateurs S et T liés par un système de relations caractéristiques. M^{lle} S. Piccard a étudié les relations caractéristiques de chacune des bases d'un système complet de bases indépendantes des groupes symétriques de degré 3, 4 et 5. M^{lle} S. Piccard a bien voulu nous confier la tâche de poursuivre cette étude pour le groupe symétrique de degré 6. En même temps, il s'agissait d'exposer les méthodes utilisées dans cette recherche.

M^{lle} S. Piccard nous a suivi constamment au cours de ce travail. Ne ménageant ni son temps, ni sa peine, elle a guidé notre recherche et nous a prodigué de judicieux conseils. Ce fut pour l'auteur un précieux encouragement et il tient à exprimer à M^{lle} S. Piccard sa très vive reconnaissance.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

II. HISTORIQUE

On sait qu'un groupe donné est complètement caractérisé par sa table de multiplication ou table de Cayley ¹⁾. Ce schéma étant valable pour tous les groupes simplement isomorphes, on obtient ainsi, sous forme abstraite, les propriétés du groupe « en soi », indépendamment de ses modes de représentation.

Mais, il est peu commode de construire un groupe abstrait en établissant sa table de multiplication. Sauf dans des cas très simples et particuliers, on se heurte à des difficultés qui sont bien connues. Il est donc naturel de chercher d'autres méthodes. L'une d'elles, devenue classique, consiste à définir un groupe abstrait à partir d'un certain nombre d'éléments de ce groupe et en tenant compte, s'il y a lieu, de certaines relations entre ces éléments.

Définition 1. — On dit que des éléments $S, T, U, \dots$ d'un groupe $\mathbf{G}$ forment une *base* de ce groupe, si tous les éléments de $\mathbf{G}$ peuvent être obtenus par composition des éléments $S, T, U, \dots$

Les éléments $S, T, U, \dots$ portent le nom d'*éléments générateurs* ²⁾ ou d'*éléments fondamentaux* ³⁾.

Considérons les éléments S^i , obtenus par itération d'un seul élément S . L'ensemble des S^i forme un demi-groupe ⁴⁾. On peut construire un groupe en adjoignant à l'élément fondamental S , par exemple, son inverse T défini par la relation :

$$(1) \quad S^2T = S \quad \text{ou} \quad S(ST) = S$$

¹⁾ Cayley (12) p. 123. Le numéro suivant le nom de l'auteur se rapporte à la bibliographie de la page 97.

²⁾ Moore (20) p. 357.

Burnside (2) p. 20. Paragraphe 18 et p. 464. Note C.

Dyck (13) p. 1.

Bourbaki (1). Paragraphe 6. N° 2, p. 67.

Dubreuil (3) p. 112.

³⁾ Burnside (2) p. 21, paragraphe 18.

⁴⁾ Dubreuil (3) p. 78.

Cette formule définit T comme l'inverse de S au sens des postulats de la théorie des groupes. En effet, comme nous allons le voir, ST n'est pas seulement *élément neutre* à droite pour S, mais encore élément neutre bilatère pour S, T, et par suite pour tous les éléments engendrés par S et T. Composons (1) à gauche avec S :

$$(2) \quad S^3T = S(S^2T) = S^2$$

Composons (1) à droite avec S :

$$(3) \quad S^2TS = S^2$$

En égalant les valeurs de S^2 , tirées de (2) et (3), nous avons :

$$(4) \quad S^2TS = S^2T$$

Or, cette égalité entraîne :

$$(5) \quad (ST)S = S(ST)$$

car si on avait :

$$(6) \quad (ST)S \neq S(ST),$$

cette inégalité entraînerait par composition à gauche avec S :

$$(7) \quad S^2TS \neq S^2T$$

inégalité qui serait en contradiction avec (4). D'après (5), ST est donc bien élément neutre à gauche et à droite pour S.

Composons (5) à gauche avec T :

$$(8) \quad T(ST)S = TS(ST) = TS \text{ d'après (1).}$$

Cette égalité entraîne la suivante :

$$(9) \quad T(ST) = T$$

car l'inégalité :

$$(10) \quad T(ST) \neq T$$

entraînerait par composition à droite avec S l'inégalité suivante qui serait en contradiction avec (8) :

$$(11) \quad T(ST)S \neq TS$$

ST est donc élément neutre à droite pour T et on montrerait de même qu'il est neutre à gauche.

Ainsi, les éléments S et T forment la base d'un groupe. En posant $T = S^{-1}$ et $ST = 1$, on voit immédiatement que ce groupe est simplement isomorphe au groupe additif des nombres entiers relatifs.

Remarque 1. — Dans la notation ST, nous convenons de composer les éléments de droite à gauche, dans l'ordre T, puis S. Cette écriture est généralement adoptée actuellement ¹⁾; on la trouve déjà dans les Exercices d'Analyse de Cauchy et dans Serret ²⁾, bien qu'à cette époque la composition de gauche à droite fût plus courante ³⁾.

Remarque 2. — M. Dubreil ⁴⁾ donne une définition de la base différente de la définition 1. Dans sa définition, le groupe est engendré par les éléments générateurs et leurs inverses ⁵⁾. Au sens de cette définition, le groupe considéré à la page précédente peut être engendré par le seul élément S. Il est clair que dans un groupe fini les deux définitions sont équivalentes.

Il peut exister entre les éléments d'un groupe **G** des relations qui ne soient pas une conséquence des postulats de la théorie des groupes. En particulier, dans l'exemple de la page 9, si l'on fait l'hypothèse que les éléments S^i ne sont pas tous différents les uns des autres, il existe certainement un entier m tel que :

$$(12) \quad S^{i+m} = S^i$$

Dans ces conditions, les S^i forment un groupe simplement isomorphe au groupe cyclique d'ordre m.

D'une façon générale, dans un groupe fini **G**, engendré par les éléments fondamentaux S, T, U,..., il existe des relations qui peuvent se mettre sous la forme :

$$(13) \quad f(S, T, U, \dots) = 1$$

Il est intéressant de considérer parmi ces relations celles dont on peut déduire toutes les autres.

Définition 2. — Un système de relations (14) $F_i(S, T, U, \dots) = 1$ est un système de *relations caractéristiques* du groupe **G** engendré par S, T, U,..., si toutes les relations $f(S, T, U, \dots) = 1$, existant entre les éléments du groupe, sont une conséquence des relations (14).

Ces relations caractéristiques portent aussi le nom de *relations fondamentales* ⁶⁾ ou *relations génératrices* ⁷⁾.

¹⁾ Van der Waerden (8) ch. II, p. 21.

²⁾ Encycl. (9) t. I. A. 6. p. 210, note 8. Serret (7) p. 246.

³⁾ Burnside (2) ch. I, p. 3.

⁴⁾ Dubreil (3) p. 112.

⁵⁾ Dyck (13) section I, p. 5, même définition.

⁶⁾ Dubreil (3) p. 112.

⁷⁾ Moore (20) p. 357.

Au nombre des premiers groupes qui ont été définis par un système d'éléments générateurs liés par des relations caractéristiques, il convient de citer les groupes de rotations laissant invariant un polyèdre régulier.

Déjà, en 1847, W. R. Hamilton ¹⁾ définissait le groupe de l'icosaèdre au moyen de trois éléments générateurs S, T, U, liés par les relations ²⁾:

$$(15) \quad \begin{aligned} S^2 &= 1 \\ T^3 &= 1 \\ U^5 &= 1 \\ U &= ST \end{aligned}$$

Cette question fut reprise en détail par van Dyck. Pour le groupe de l'icosaèdre, il donne les relations caractéristiques suivantes ³⁾:

$$(16) \quad \begin{aligned} S^2 &= 1 \\ T^3 &= 1 \\ U^5 &= 1 \\ STU &= 1 \end{aligned}$$

Nous avons cité ce groupe, isomorphe au groupe alterné de degré cinq et d'ordre 60, en raison de son importance bien connue ⁴⁾; mais d'autres groupes finis ou infinis ont été étudiés de ce point de vue. Qu'il nous suffise de mentionner les travaux de Netto ⁵⁾ s'attachant aux groupes engendrés par deux éléments.

C'est en 1896 que paraissent presque simultanément deux travaux très importants sur la définition abstraite du groupe symétrique de degré n: S_n . L'un est dû à Burnside ⁶⁾ et fut présenté le 12 novembre à la Société Mathématique de Londres. L'autre est dû à E. H. Moore ⁷⁾ de Chicago et fut lu à la même société un mois plus tard, soit le 10 décembre.

A l'époque seule était connue la définition abstraite des groupes symétriques de degré 3 et 4 et dont Burnside rappelle les relations caractéristiques ⁸⁾:

$$(17) \quad \begin{aligned} S^2 &= 1 \\ T^3 &= 1 \\ (ST)^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$(18) \quad \begin{aligned} S^2 &= 1 \\ T^3 &= 1 \\ (ST)^4 &= 1 \end{aligned}$$

¹⁾ Hamilton (15) p. 415-416.

²⁾ Dans cet exemple, comme dans les suivants, nous uniformisons les notations.

³⁾ Dyck (13) p. 35, formules (35).

(14) p. 82, paragraphe 2.

⁴⁾ Klein (5).

⁵⁾ Netto (6) paragraphe 37, p. 37.

(21) p. 243-262.

⁶⁾ Burnside (10) p. 119-129.

⁷⁾ Moore (20) pp. 357-366.

⁸⁾ Burnside (10) p. 119.

Burnside généralise ces systèmes et caractérise le groupe symétrique de degré n par les relations ¹⁾:

$$(19) \quad \begin{aligned} S_2^2 &= 1 \\ S_n^n &= 1 \\ (S_2 S_n)^{n-1} &= 1^2) \end{aligned}$$

auxquelles il convient d'adjoindre les relations:

$$(20) \quad [(S_2 S_n)^{r-1} S_n^{-r+1}]^r = 1 \quad (r = 2, 3, \dots, n)$$

$$(21) \quad (S_2 S_n^r S_2 S_n^{-r})^2 = 1 \quad (r = 2, 3, \dots, \frac{n-1}{2} \text{ ou } \frac{n}{2})$$

dont le nombre n'excède pas $\frac{3n-10}{2}$ ou $\frac{3n-11}{2}$ suivant que n est pair ou impair. En effet, les relations (20) pour $r = 2, n-1, n$, équivalent au système (19).

Pour établir ce résultat, l'auteur traduit sous forme abstraite les propriétés du groupe engendré par les substitutions:

$$S_r = (123 \dots r) \quad (r = 2, 3, \dots, n)$$

En particulier l'ordre r des éléments générateurs peut être formulé en termes de S_2 et S_n , ce qui fournit les relations (20). La démonstration se fait par induction et Burnside prouve que si S_2 et S_{n-1} engendrent le groupe symétrique de degré $n-1$, il suffit pour obtenir le groupe symétrique de degré n d'introduire l'élément S_n et les relations caractéristiques supplémentaires ³⁾:

$$(22) \quad \begin{aligned} (S_2 S_n^2 S_2 S_n^{-2})^2 &= 1 \\ S_{n-1} &= S_n^{-1} S_2 S_n^2 \end{aligned}$$

Notons encore que Burnside établit directement les relations caractéristiques du groupe S_5 : ⁴⁾

$$(23) \quad \begin{aligned} S_2^2 &= 1 \\ (S_2 S_5 S_2 S_5^{-1})^3 &= 1 \\ (S_2 S_5)^4 &= 1 \\ S_5^5 &= 1 \end{aligned}$$

et ceci en faisant intervenir élégamment les relations (15) de Hamilton, en posant:

$$(24) \quad \begin{aligned} U &= S_5^{-2} \\ S &= (S_5 S_2)^2 \end{aligned}$$

¹⁾ Nous inversons l'ordre des lettres pour qu'il soit conforme à l'ordre admis dans la remarque 1.

²⁾ Burnside (10) p. 128.

³⁾ Burnside (10) p. 121.

⁴⁾ Burnside (10) p. 125, paragraphe 6.

Enfin, pour le groupe S_6 , les systèmes (19) et (20) deviennent:

$$(25) \quad \begin{aligned} S_2^2 &= 1 \\ S_6^6 &= 1 \\ (S_2 S_6)^5 &= 1 \\ (S_2 S_6 S_2 S_6^{-1})^3 &= 1 \\ (S_2 S_6^2 S_2 S_6^{-1})^4 &= 1 \\ (S_2 S_6^2 S_2 S_6^{-2})^2 &= 1 \end{aligned}$$

Le travail de Moore donne des relations caractéristiques plus simples et le nombre des relations est inférieur à celui de Burnside. Le mathématicien anglais s'était d'ailleurs déclaré prêt à retirer son travail au profit de son collègue américain ¹⁾.

Moore s'appuie sur le fait que les transpositions

$$S_i = (i, i+1) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

engendrent le groupe S_n . Sous forme abstraite, il démontre que les éléments S_i liés par les relations ²⁾:

$$(26) \quad \begin{aligned} S_i^2 &= 1 & (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ (S_i S_{i+1})^3 &= 1 & (i = 1, 2, \dots, n-2) \\ (S_i S_j)^2 &= 1 & (i = 1, 2, \dots, n-3) \\ & & (j = i+2, i+3, \dots, n-1) \end{aligned}$$

engendrent un groupe d'ordre $n!$ simplement isomorphe au groupe symétrique de degré n . C'est aussi par induction que le théorème est établi et Moore utilise, comme Burnside, le fait que le groupe S_{n-1} et le groupe cyclique engendré par:

$$T = S_1 S_2 \dots S_i \dots S_{n-1}$$

sont permutables. La seconde forme ³⁾ donnée par Moore aux relations caractéristiques nous sera plus utile pour la suite. Elle ne fait appel qu'à deux éléments générateurs que nous désignerons par S et T . On a ⁴⁾:

$$(27) \quad \begin{aligned} S^n &= 1 \\ T^2 &= 1 \\ (ST)^{n-1} &= 1 \\ (S^{\mp 1} T S^{\pm 1} T)^3 &= 1 \\ (S^{\mp 1} T S^{\pm 1} T)^2 &= 1 \quad (i = 2, 3, \dots, n-2) \end{aligned}$$

Les relations avec le signe supérieur sont des conséquences des relations avec le signe inférieur. Le système de Moore est remarquable par sa symétrie.

¹⁾ Burnside (10) p. 119, note.

²⁾ Moore (20) p. 358.

³⁾ Moore (20) p. 364, paragraphe 3.

⁴⁾ Moore (20) p. 358 et 364.

Burnside reprendra dans son traité ce système et donnera une démonstration abrégée ¹⁾).

Envisageons le cas particulier de $n = 6$ qui retiendra notre attention par la suite:

$$(28) \quad \begin{aligned} S^6 &= 1 \\ T^2 &= 1 \\ (ST)^5 &= 1 \\ (STS^{-1}T)^3 &= 1 \\ (S^2TS^{-2}T)^2 &= 1 \\ (S^3T)^4 &= 1 \end{aligned}$$

Signalons enfin que Miller ²⁾, dans son étude des groupes de degré non supérieur à 7, donne un autre système de 5 relations caractéristiques pour S_6 :

$$(29) \quad \begin{aligned} S^6 &= 1 \\ T^4 &= 1 \\ (S^2T^2)^4 &= 1 \\ (S^2T^3S^4T)^2 &= 1 \\ S^5T^3S(S^2T)^2T(S^2T)^3T &= 1 \end{aligned}$$

Miller déduit ce système de celui du groupe alterné ³⁾. Le seul avantage de ce système est de n'avoir que 5 relations caractéristiques, car la dernière est loin d'avoir la simplicité des relations des systèmes précédents. Burnside ⁴⁾ préfère donner aux relations caractéristiques une forme plus symétrique. Il propose le système suivant, liant $n-1$ éléments générateurs, et qui contient par ailleurs un bon nombre de relations superflues:

$$(30) \quad \begin{aligned} S_i^2 &= 1 \\ (S_iS_j)^3 &= 1 \\ (S_iS_jS_iS_k)^2 &= 1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} i &\neq j \neq k \\ i, j, k &= 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

¹⁾ Burnside (2) note C pp. 464-465.

²⁾ Miller (19) pp. 368-369.

³⁾ Miller (19) p. 372, lien: 13.

⁴⁾ Burnside (2) note C p. 464.

III. LES BASES DU GROUPE SYMÉTRIQUE

Comme le remarquait déjà Miller ¹⁾, un même groupe peut être caractérisé de façons bien différentes suivant la base utilisée. Les relations caractéristiques définissent le groupe sous forme abstraite, tout en conservant les particularités de la base qui engendre ce groupe. Burnside ²⁾ cite comme exemple le groupe symétrique de degré trois, qu'on peut définir soit par les relations caractéristiques:

$$(1) \quad S^3 = 1 \quad U^2 = 1 \quad (SU)^2 = 1$$

à partir de deux éléments générateurs S et U, soit par le système:

$$(2) \quad U^2 = 1 \quad V^2 = 1 \quad (UV)^3 = 1$$

obtenu également à partir d'une base du second ordre.

Moore ³⁾ et Miller ⁴⁾ donnent deux systèmes de relations caractéristiques pour le groupe symétrique de degré 6 qui sont très différents. Dans le système de Moore, les éléments générateurs sont respectivement d'ordre 6 et 2, alors que dans le système de Miller ils sont d'ordre 6 et 4.

Avant d'établir divers systèmes de relations caractéristiques d'un groupe, il s'agit d'en étudier les bases. M^{lle} S. Piccard s'est occupée spécialement ⁵⁾ des couples de substitutions qui engendrent le groupe symétrique de degré n. On sait que le groupe symétrique de degré n est engendré par les transpositions:

$$(12) (13) \dots (li) \dots (ln) \quad i=2,3,\dots,n$$

Une généralisation de ce théorème est due à P. Hoyer ⁶⁾. M^{lle} S. Piccard a établi divers critères qui permettent de déterminer si deux substitutions

¹⁾ Miller (19) p. 363.

²⁾ Burnside (2) p. 21.

³⁾ Moore, voir chap. II, relations (28) p. 15.

⁴⁾ Voir chap. II, relations (29) p. 15.

⁵⁾ S. Piccard (22) et (23).

⁶⁾ Hoyer (17) p. 539-544.

S et T forment ou non une base du groupe symétrique de degré n. Ses recherches aboutissent à un important théorème d'existence ¹⁾:

Quel que soit l'entier $n \geq 3$, il existe, pour toute substitution non identique S du groupe S_n , au moins une substitution T du groupe S_n qui constitue avec S une base de S_n , à l'exception des trois substitutions (12)(34), (13)(24), (14)(23) qui ne font partie d'aucune base du groupe S_4 .

Remarquons que les substitutions qui font exception: (12)(34), (13)(24), (14)(23), forment avec la substitution identique un groupe simplement isomorphe au groupe de Klein ²⁾.

Définition 3. — Deux bases S, T et S', T' du groupe S_n sont *semblables* s'il existe une substitution R telle que l'on ait simultanément soit $S' = RSR^{-1}$, $T' = RTR^{-1}$, soit $S' = RTR^{-1}$, $T' = RSR^{-1}$.

On dit aussi que la base S', T' est la transformée de la base S, T par la substitution R. Inversement, la base S, T est la transformée de la base S', T' par la substitution R^{-1} .

Soit S, T une base du groupe symétrique S_n . On peut se demander quel est le nombre des bases semblables à la base S, T. M^{lle} S. Piccard a démontré ³⁾ qu'il existe, à ce point de vue deux espèces de bases, les unes admettant $n!$ transformées distinctes et les autres $\frac{n!}{2}$.

Définition 4. — On appelle base de *première espèce* du groupe S_n une base qui possède $n!$ transformées distinctes par les substitutions de S_n . ⁴⁾

On appelle base de *seconde espèce* du groupe S_n une base qui possède $\frac{n!}{2}$ transformées distinctes par les substitutions de S_n . ⁴⁾

Le nombre de toutes les bases du groupe symétrique de degré n est donc un multiple de $\frac{n!}{2}$ ⁵⁾ et nous pouvons poser:

$$(3) \quad N_n = K_n \frac{n!}{2} \quad ^6)$$

où N_n désigne le nombre total des bases de S_n et K_n un entier positif.

Remarque 3. — Deux bases semblables S, T et S', T' du groupe S_n sont caractérisées par les mêmes relations. En effet, par hypothèse:

$$(4) \quad \begin{array}{ll} S' = RSR^{-1} & \text{ou} \quad S' = RTR^{-1} \\ T' = RTR^{-1} & T' = RSR^{-1} \end{array}$$

Nous n'envisageons que la première hypothèse, la seconde conduisant à des développements tout à fait similaires.

¹⁾ S. Piccard (22) p. 80, proposition 42.

²⁾ van der Waerden (8) p. 36, Aufgaben 1 und 4.

³⁾ S. Piccard (22) corollaire 24 p. 90.

⁴⁾ S. Piccard (22) page 88.

⁵⁾ S. Piccard (22) p. 91, proposition 47.

⁶⁾ S. Piccard (22) p. 88.

A toute relation (5) $f(S', T') = 1$ entre les éléments générateurs S' et T' , le système (4) fait correspondre la relation:

$$f(RSR^{-1}, RTR^{-1}) = Rf(S, T)R^{-1} = 1$$

d'où l'on tire:

$$(5') \quad f(S, T) = 1$$

Réciproquement, toute relation (5') entraîne (5) d'après (4).

Il s'ensuit que pour l'étude des relations caractéristiques du groupe S_n , les bases semblables peuvent être considérées comme équivalentes.

Définition 5. — Deux bases S, T et S', T' du groupe S_n sont *indépendantes* si, quelle que soit la substitution R du groupe S_n , les deux bases RSR^{-1} , RTR^{-1} et S', T' sont distinctes, c'est-à-dire différent au moins par une substitution ¹⁾.

Définition 6. — Soit M_n un entier supérieur à 1. Nous disons que M_n bases S_i, T_i ($i = 1, 2, \dots, M_n$) du groupe S_n forment un *système complet de bases indépendantes* de S_n si elles sont toutes indépendantes deux à deux et si toute base de S_n s'obtient en transformant l'une des bases du système considéré par une substitution déterminée de S_n ²⁾.

Le nombre M_n est un invariant du groupe S_n . Tout système complet de bases indépendantes de S_n possède des bases de première espèce et des bases de seconde espèce. En désignant par M'_n le nombre des bases de première espèce et par M''_n le nombre des bases de seconde espèce, on a:

$$(6) \quad M_n = M'_n + M''_n$$

$$(7) \quad K_n = 2M'_n + M''_n$$

où K_n a la même signification que dans (3). ³⁾

M^{lle} S. Piccard a établi un système complet de bases indépendantes pour chacun des groupes symétriques de degré 3, 4, 5, 6, ⁴⁾ et 7 ⁵⁾. Dans un travail postérieur ⁶⁾, M^{lle} Piccard a étudié les relations caractéristiques de ces bases pour les groupes symétriques de degré 3, 4 et 5.

Il nous appartenait de poursuivre cette étude en établissant les relations caractéristiques des bases du groupe symétrique de degré 6.

¹⁾ S. Piccard (22) p. 9, définition 3.

²⁾ S. Piccard (22) p. 9, définition 4.

³⁾ S. Piccard (22) p. 88.

⁴⁾ S. Piccard (22) p. 98-101.

⁵⁾ S. Piccard (23) p. 47-117.

⁶⁾ S. Piccard (24) p. 88-91.

IV. ÉTUDE DE QUELQUES BASES DU GROUPE S_6 ET DE LEURS RELATIONS CARACTÉRISTIQUES

Un système complet de bases indépendantes du groupe symétrique S_6 comprend 163 bases: 155 de première espèce et 8 de seconde espèce. D'après les notations introduites dans le chapitre précédent, on a donc:

$$\begin{array}{llll} (1) & M_n = 163 & M'_n = 155 & M''_n = 8 \\ (2) & K_n = 318 & & \end{array}$$

La valeur de K_n , calculée par la formule (7) du chapitre III, permet de déterminer le nombre total des bases du groupe S_6 . Il suffit de remplacer K_n par sa valeur dans la formule (3) du chapitre III:

$$(3) \quad N_n = 318 \cdot \frac{6!}{2} = 114480^1)$$

L'étude des relations caractéristiques des 163 bases indépendantes du groupe S_6 est facilitée du fait que le groupe S_6 possède des automorphismes externes. Hölder a démontré ²⁾ que le groupe symétrique de degré n ne possède des automorphismes externes que pour $n = 6$. M^{lle} S. Piccard a donné ³⁾ une nouvelle démonstration de ce théorème en mettant en évidence la cause de ce résultat. Le nombre 6 est le seul entier qui est à la fois égal à la somme et au produit de ses diviseurs propres ⁴⁾:

$$(4) \quad 6 = 1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$$

Du fait de l'existence des automorphismes externes, les bases du groupe S_6 se répartissent en deux catégories.

Définition 7. — Une base S,T du groupe S_6 est dite base de *première catégorie* s'il lui correspond une base semblable par les automorphismes du

¹⁾ S. Piccard (23) p. 117.

²⁾ Hölder (16) p. 333-345.

³⁾ S. Piccard (24) p. 94-100.

⁴⁾ S. Piccard (24) p. 96, relation 4.

groupe S_6 . Dans le cas contraire, la base S, T est dite de *seconde catégorie*. ¹⁾

Le groupe S_6 possède 7 bases de première catégorie et 156 bases de seconde catégorie réparties en 78 couples de bases qui se correspondent par les automorphismes externes du groupe S_6 . ²⁾

Nous donnons dans le tableau I un système complet de bases indépendantes du groupe S_6 . ³⁾ Deux bases S, T et S', T' écrites sur la même ligne se correspondent par les automorphismes externes du groupe S_6 . Elles seront donc caractérisées par les mêmes relations. Pour l'étude des relations caractéristiques, il suffit de considérer les 7 bases de première catégorie et une base de chacun des couples de bases de seconde catégorie.

La méthode que nous utilisons dans cette étude nous a été indiquée par M^{lle} S. Piccard qui l'a elle-même employée pour l'étude des groupes symétriques de degré n ($n = 3, 4, 5$) ⁴⁾. Cette méthode rappelle par son principe la méthode citée, en particulier, par Hoyer ⁵⁾ et Netto ⁶⁾. Elle est valable pour tout groupe fini G de substitutions.

L'étude d'un groupe fini G , engendré par deux substitutions S et T comprend:

- A) la *reconstitution* du groupe G à partir de ses éléments générateurs S et T ;
- B) la liste des *relations* obtenues par la reconstitution;
- C) l'*élimination* des relations superflues;
- D) un système de *relations caractéristiques* du groupe G accompagné, s'il y a lieu, d'un bref commentaire.

A. RECONSTITUTION DU GROUPE

Soit S et T les éléments générateurs du groupe fini G . Nous supposons que l'ordre m de S soit supérieur ou égal à l'ordre n de T .

$$(5) \quad m \geq n$$

Il est avantageux dans ce cas de commencer la reconstitution du groupe par les éléments S^i ($i = 1, 2, \dots, m$).

¹⁾ S. Piccard (24) p. 92.

²⁾ S. Piccard (24) p. 92-94.

³⁾ S. Piccard (24) p. 92-94.

⁴⁾ S. Piccard (24) et (27.)

⁵⁾ Hoyer (18) p. 103-108.

⁶⁾ Netto (21) p. 256.

TABLEAU I.¹⁾*Bases de première catégorie :*

S	T
1 (1234)	(1356)
2 (123456)	(12) (364)
3 (123456)	(12) (365)
4 (123456)	(13) (456)
5 (123456)	(13) (465)
6 (123456)	(14) (235)
7 (123456)	(14) (236)

Bases de deuxième catégorie :

S	T	S	T
8 (1234)	(456)	9 (1234)	(152) (346)
10 (1234)	(125) (36)	11 (1453)	(123456)
12 (1234)	(152) (36)	13 (1435)	(123456)
14 (1234)	(125) (46)	15 (1534)	(123456)
16 (1234)	(152) (46)	17 (1354)	(123456)
18 (1234)	(135) (46)	19 (1432)	(123456)
20 (1234)	(153) (46)	21 (1234)	(123456)
22 (1234)	(12) (356)	23 (1342)	(123456)
24 (1234)	(12) (456)	25 (1243)	(123456)
26 (1234)	(13) (256)	27 (1463)	(123456)
28 (1234)	(12) (3456)	29 (1234)	(15) (2346)
30 (1234)	(12) (3654)	31 (1234)	(15) (2643)
32 (1234)	(12) (3546)	33 (1234)	(13) (2456)
34 (1234)	(15) (2364)	35 (1234)	(15) (2463)
36 (1234)	(15) (2436)	37 (1234)	(15) (2634)
38 (123) (45)	(146)	39 (123456)	(124) (365)
40 (123) (45)	(164)	41 (123456)	(125) (364)
42 (123) (45)	(14) (26)	43 (123456)	(12) (35)
44 (123) (45)	(14) (56)	45 (123456)	(12) (36)
46 (123) (45)	(14) (36)	47 (123456)	(12) (46)
48 (123) (45)	(12) (346)	49 (156324)	(123456)
50 (123) (45)	(12) (364)	51 (132564)	(123456)
52 (123) (45)	(14) (236)	53 (135624)	(123456)
54 (123) (45)	(14) (263)	55 (142653)	(123456)
56 (123) (45)	(14) (256)	57 (145623)	(123456)
58 (123) (45)	(12) (34) (56)	59 (123456)	(12)
60 (123) (45)	(124) (356)	61 (123456)	(142)
62 (123) (45)	(142) (365)	63 (123456)	(124)
64 (123) (45)	(145) (236)	65 (123456)	(123)
66 (123) (45)	(154) (263)	67 (123456)	(132)
68 (123) (45)	(134) (256)	69 (123456)	(125)

¹⁾ S. Piccard (24) p. 92-94.

S	T	S	T
70 (123) (45)	(143) (265)	71 (123456)	(152)
72 (12345)	(56)	73 (12345)	(14) (23) (56)
74 (12345)	(1263)	75 (12345)	(1326)
76 (12345)	(1362)	77 (12345)	(1623)
78 (12345)	(1346)	79 (12345)	(1436)
80 (12345)	(1643)	81 (12345)	(1634)
82 (12345)	(123) (46)	83 (12354)	(123456)
84 (12345)	(132) (46)	85 (12543)	(123456)
86 (12345)	(123) (56)	87 (13452)	(123456)
88 (12345)	(132) (56)	89 (14532)	(123456)
90 (12345)	(124) (36)	91 (15243)	(123456)
92 (12345)	(142) (36)	93 (14235)	(123456)
94 (12345)	(124) (56)	95 (15324)	(123456)
96 (12345)	(142) (56)	97 (13425)	(123456)
98 (12345)	(126) (34)	99 (14523)	(123456)
100 (12345)	(162) (34)	101 (14352)	(123456)
102 (12345)	(126) (35)	103 (15432)	(123456)
104 (12345)	(162) (35)	105 (12345)	(123456)
106 (12345)	(126) (45)	107 (12534)	(123456)
108 (12345)	(162) (45)	109 (13254)	(123456)
110 (12345)	(136) (24)	111 (13245)	(123456)
112 (12345)	(163) (24)	113 (15342)	(123456)
114 (12345)	(136) (25)	115 (12435)	(123456)
116 (12345)	(163) (25)	117 (15423)	(123456)
118 (12345)	(136) (45)	119 (13524)	(123456)
120 (12345)	(163) (45)	121 (14253)	(123456)
122 (1234) (56)	(1?) (345)	123 (13) (2456)	(123456)
124 (1234) (56)	(12) (354)	125 (13) (2654)	(123456)
126 (1234) (56)	(12) (356)	127 (12) (3465)	(123456)
128 (1234) (56)	(12) (456)	129 (12) (3564)	(123456)
130 (1234) (56)	(13) (256)	131 (14) (2536)	(123456)
132 (1234) (56)	(15) (234)	133 (12) (3645)	(123456)
134 (1234) (56)	(15) (243)	135 (12) (3546)	(123456)
136 (1234) (56)	(15) (236)	137 (13) (2546)	(123456)
138 (1234) (56)	(15) (263)	139 (13) (2564)	(123456)
140 (1234) (56)	(15) (346)	141 (13) (2465)	(123456)
142 (1234) (56)	(15) (364)	143 (13) (2645)	(123456)
144 (123456)	(12) (345)	145 (13) (265)	(123456)
146 (123456)	(12) (354)	147 (13) (245)	(123456)
148 (123456)	(12) (346)	149 (12) (356)	(123456)
150 (123456)	(12) (456)	151 (13) (254)	(123456)
152 (123456)	(12) (465)	153 (13) (256)	(123456)
154 (123456)	(14) (253)	155 (14) (263)	(123456)
156 (123456)	(134562)	157 (123) (45)	(16) (243)
158 (123456)	(126543)	159 (123) (45)	(16) (234)
160 (123456)	(132654)	161 (123) (45)	(14) (356)
162 (123456)	(143265)	163 (123) (45)	(14) (265)

Remarque 4. — Si l'ordre de T est supérieur à l'ordre de S ($n > m$), il est préférable de commencer la reconstitution du groupe par les éléments T^j ($j = 1, 2, \dots, n$). Dans ce cas, tout ce que nous exposons dans la suite de ce chapitre reste valable, à condition de remplacer S par T et inversement, m par n et inversement.

Nous établissons dans un premier tableau les substitutions S^i , en écrivant toute substitution

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_k \end{pmatrix}$$

sous la forme abrégée

$$a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_k.$$

Ainsi, dans la reconstitution du groupe S_8 , à partir de la base $S_8 = (1234)$, $T_8 = (456)$, le tableau 1 s'écrira :

$$\begin{array}{l} 1 \ S^1 \\ 234156 \\ 341256 \\ 412356 \\ 123456 \end{array}$$

Le nombre de lignes du tableau est égal à l'ordre m de S.

Nous composons les substitutions S^i à droite successivement avec $T, T^2, T^3, \dots, T^n$, ce qui donne n tableaux portant les numéros 2, 3, $\dots, n+1$. Les $n-1$ premiers tableaux $S^i T^j$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$) sont différents du tableau 1, tandis que le tableau $n+1$ des substitutions $S^i T^n$ est identique, ligne pour ligne, au tableau 1, car :

$$(6) \qquad T^n = 1$$

Il est donc inutile de poursuivre la reconstitution du groupe avec ce tableau et nous le notons en soulignant le dit tableau et en écrivant à sa droite le numéro 1 du tableau qui lui est équivalent.

Viennent ensuite les tableaux contenant les substitutions de la forme $S^i T^j S^k$. Occupons-nous d'abord des $n-1$ tableaux $S^i T^j S$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$). Il peut s'en trouver qui soient équivalents à des tableaux précédents, c'est-à-dire contenant les mêmes substitutions à l'ordre près. Nous les éliminons pour la suite des calculs en les soulignant et en notant à leur droite le numéro du tableau équivalent. Ceci fournit une relation du type :

$$(7) \qquad S^i T^j S = S^{i'} T^{j'}$$

Nous composons les tableaux restants à droite avec S et en éliminant au fur et à mesure les tableaux équivalents à un tableau précédemment obtenu.

Remarque 5. — A tout tableau $S^u T^v$ ($u = 1, 2, \dots, m; v \leq n-1$) correspond un tableau équivalent $S^i T^j S^k$ ($i = 1, 2, \dots, m; j \leq n-1; k \leq m$). Si $k = m$, les tableaux se correspondent ligne par ligne.

Nous composons les tableaux non soulignés $S^i T^j S^k$ à droite avec $T, T^2, \dots, T^l$ ($l \leq n$) en éliminant au fur et à mesure les tableaux précédemment obtenus, et ainsi de suite. Comme le groupe $\mathbf{G}$ que nous reconstituons est supposé fini, nous obtiendrons toutes ses substitutions en un nombre fini de tableaux.

Remarque 6. — M désignant l'ordre du groupe $\mathbf{G}$, la reconstitution de ce groupe comporterait $\frac{2M}{m}$ tableaux, dont la moitié seraient soulignés. Pour le groupe symétrique $\mathbf{S}_6$ d'ordre $6! = 720$, la reconstitution comporterait $\frac{1440}{m}$ tableaux dont $\frac{720}{m}$ soulignés. Mais pour abrégier l'écriture, nous avons supprimé tous les tableaux se terminant par S^m et T^n .

B. RELATIONS

La liste des relations entre S et T comprend d'abord les deux relations $S^m = 1$ et $T^n = 1$ donnant l'ordre des éléments générateurs. Nous écrivons ensuite les relations qui découlent de la reconstitution du groupe. Elles sont de la forme:

$$(8) \quad f_{p+1}(S, T) = f_p(S, T)$$

p indiquant le nombre des lettres S et T figurant dans l'expression f . On ramène ces égalités à des égalités de la forme $F_{2p+1}(S, T) = 1$ en composant (8) à droite avec f_p^{-1} :

$$(9) \quad F_{2p+1}(S, T) = f_{p+1}(S, T) f_p^{-1}(S, T) = 1$$

Remarque 7. — Pour faciliter l'élimination, nous remplaçons dans (9) les exposants négatifs par les exposants positifs, en utilisant les relations $S^m = 1$ et $T^n = 1$. Le nombre $2p+1$ des lettres S et T dans $F_{2p+1}(S, T)$ étant impair, l'expression $F_{2p+1}(S, T)$ commence et finit par S . On la transforme immédiatement en une expression équivalente de $2p$ lettres S et T commençant par T et se terminant par S .

Ainsi, pour la base S_8, T_8 déjà citée, la relation:

$$(10) \quad 26/17 \quad S^4 T S^3 T S = S^3 T^2 S T^2 \quad \text{devient:}$$

$$(11) \quad T S^3 T S T S^3 T S = 1$$

Il n'y a aucun inconvénient à supprimer dans la reconstitution du groupe les tableaux dont il est question dans la remarque 6. On ne supprime ainsi

que des relations équivalentes respectivement à $S^m = 1$ et $T^n = 1$, qui figurent déjà dans la liste des relations.

C. ÉLIMINATION

Lors de l'élimination des relations superflues, nous essayons autant que possible de montrer qu'une relation donnée est une conséquence des précédentes. Ce moyen permet d'éviter à coup sûr des cercles vicieux. Le numéro des relations utilisées dans l'élimination est inscrit sous l'expression correspondante. Mais nous avons omis de signaler l'emploi des relations $S^m = 1$ et $T^n = 1$ en raison de leur fréquent usage.

Il est clair que dans cette élimination, on ne tient aucun compte de la forme particulière des substitutions S et T qui ne sont que des symboles abstraits soumis aux postulats de la théorie des groupes.

D. RELATIONS CARACTÉRISTIQUES

A la suite de l'élimination des relations superflues, il reste un système de relations caractéristiques du groupe considéré. Dans certains cas, on peut transformer les relations restantes pour donner au système des relations caractéristiques une forme plus élégante. Il est évident, que dans cette transformation, aucune relation étrangère au système ne saurait être utilisée. Le nouveau système n'est équivalent au premier que si la transformation inverse est possible.

Nous donnons dans les pages qui suivent les calculs complets pour la base S_8 , T_8 et les résultats obtenus pour les bases S_{28} , T_{28} ; S_{79} , T_{79} et S_{83} , T_{83} . Nous établissons dans le chapitre suivant la liste complète des bases du groupe S_6 pour lesquelles nous avons effectué tous les calculs.

Reconstitution du groupe S_6 .

Base: $S_8 = (1234)$ $T_8 = (456)$.

1 S^1	2 S^1T	3 S^1T^2	4 S^1TS	5 S^1T^2S
234156	234561	234615	345261	346215
341256	341562	341625	415362	416325
412356	412563	412635	125463	126435
123456	123564	123645	235164	236145
6 S^1TS^2	7 $S^1T^2S^2$	8 S^1TS^3	9 $S^1T^2S^3$	10 S^1TST
452361	462315	523461	623415	345612
153462	163425	534162	634125	415623
254163	264135	541263	641235	125634
351264	361245	512364	612345	235641

11 S^1T^2ST 346152 416253 126354 236451	12 S^1TS^2T 452613 153624 254631 351642	13 $S^1T^2S^2T$ 462153 163254 264351 361452	14 S^1TS^3T 523614 534621 541632 512643	15 $S^1T^2S^3T$ 623154 634251 641352 612453
16 S^1TST^2 345126 415236 125346 235416	17 $S^1T^2ST^2$ 346521 416532 126543 236514	18 $S^1TS^2T^2$ 452136 153246 254316 351426	19 $S^1T^2S^2T^2$ 462531 163542 264513 361524	20 $S^1TS^3T^2$ 523146 534216 541326 512436
21 $S^1T^2S^3T^2$ 623541 634512 641523 612534	22 S^1TSTS 456312 156423 256134 356241	23 S^1T^2STS 461352 162453 263154 364251	24 S^1TS^2TS 526413 536124 546231 516342	25 $S^1T^2S^2TS$ 621453 632154 643251 614352
26 S^1TS^3TS 236514 346521 416532 <u>126543</u> 17	27 $S^1T^2S^3TS$ 231654 342651 413652 124653	28 S^1TST^2S 451326 152436 253146 354216	29 $S^1T^2ST^2S$ 465321 165432 265143 365214	30 $S^1TS^2T^2S$ 521436 532146 543216 514326
31 $S^1T^2S^2T^2S$ 625431 635142 645213 615324	32 $S^1TS^3T^2S$ 231546 342516 413526 124536	33 $S^1T^2S^3T^2S$ 235641 345612 415623 <u>125634</u> 10	34 S^1TSTS^2 563412 564123 561234 562341	35 $S^1T^2STS^2$ 613452 624153 631254 642351
36 $S^1TS^2TS^2$ 264513 361524 462531 <u>163542</u> 19	37 $S^1T^2S^2TS^2$ 214653 321654 432651 143652	38 $S^1T^2S^3TS^2$ 316254 426351 136452 246153	39 $S^1TST^2S^2$ 513426 524136 531246 542316	40 $S^1T^2ST^2S^2$ 653421 654132 651243 652314
41 $S^1TS^2T^2S^2$ 214536 321546 432516 143526	42 $S^1T^2S^2T^2S^2$ 254631 351642 452613 <u>153624</u> 12	43 $S^1TS^3T^2S^2$ 315246 425316 135426 245136	44 S^1TSTS^3 634512 641523 612534 <u>623541</u> 21	45 $S^1T^2TS^3$ 134652 241653 312654 423651
46 $S^1T^2S^2TS^3$ 146253 216354 326451 436152	47 $S^1T^2S^3TS^3$ 162354 263451 364152 461253	48 $S^1TST^2S^3$ 134526 241536 312546 423516	49 $S^1T^2ST^2S^3$ 534621 541632 512643 <u>523614</u> 14	50 $S^1TS^2T^2S^3$ 145236 215346 325416 435126

51 $S^1TS^3T^2S^3$ 152346 253416 354126 451236	52 S^1TSTST 456123 156234 256341 356412	53 S^1T^2STST 461523 162534 263541 364512	54 S^1TS^2TST 526134 536241 546312 516423	55 $S^1T^2S^2TST$ 621534 632541 643512 614523
56 $S^1T^2S^3TST$ 231546 342516 413526 <u>124536</u> 32	57 S^1TST^2ST 451263 152364 253461 354162	58 $S^1T^2ST^2ST$ 465213 165324 265431 365142	59 $S^1TS^2T^2ST$ 521364 532461 543162 514263	60 $S^1T^2S^2T^2ST$ 625314 635421 645132 615243
61 $S^1TS^3T^2ST$ 231465 342165 413265 124365	62 S^1TSTS^2T 563124 564231 561342 562413	63 $S^1T^2STS^2T$ 613524 624531 631542 642513	64 $S^1T^2S^2TS^2T$ 214536 321546 432516 <u>143526</u> 41	65 $S^1T^2S^3TS^2T$ 316542 426513 136524 246531
66 $S^1TST^2S^2T$ 513264 524361 531462 542163	67 $S^1T^2ST^2S^2T$ 653214 654321 651432 652143	68 $S^1TS^2T^2S^2T$ 214365 321465 432165 143265	69 $S^1TS^3T^2S^2T$ 315462 425163 135264 245361	70 $S^1T^2STS^3T$ 134526 241536 312546 <u>423516</u> 48
71 $S^1T^2S^2TS^3T$ 146532 216543 326514 436521	72 $S^1T^2S^3TS^3T$ 162543 263514 364521 461532	73 $S^1TST^2S^3T$ 134265 241365 312465 423165	74 $S^1TS^2T^2S^3T$ 145362 215463 325164 435261	75 $S^1TS^3T^2S^3T$ 152463 253164 354261 451362
76 S^1TSTST^2 456231 156342 256413 356124	77 $S^1T^2STST^2$ 461235 162345 263415 364125	78 $S^1TS^2TST^2$ 526341 536412 546123 516234	79 $S^1T^2S^2TST^2$ 621345 632415 643125 614235	80 $S^1TST^2ST^2$ 451632 152643 253614 354621
81 $S^1T^2ST^2ST^2$ 465132 165243 265314 365421	82 $S^1TS^2T^2ST^2$ 521643 532614 543621 514632	83 $S^1T^2S^2T^2ST^2$ 625143 635214 645321 615432	84 $S^1TS^3T^2ST^2$ 231654 342651 413652 <u>124653</u> 27	
85 $S^1TSTS^2T^2$ 563241 564312 561423 562134	86 $S^1T^2STS^2T^2$ 613245 624315 631425 642135	87 $S^1T^2S^3TS^2T^2$ 316425 426135 136245 246315	88 $S^1TST^2S^2T^2$ 513642 524613 531624 542631	

89 $S^1T^2S^2T^2$ 653142 654213 651324 652431	90 $S^1TS^2T^2S^2T^2$ 214653 321654 432651 <u>143652</u> 37	91 $S^1TS^3T^2S^2T^2$ 315624 425631 135642 245613	92 $S^1T^2S^2TS^3T^2$ 146325 216435 326145 436215
93 $S^1T^2S^3TS^3T^2$ 162435 263145 364215 461325	94 $S^1TST^2S^3T^2$ 134652 241653 312654 <u>423651</u> 45	95 $S^1TS^2T^2S^3T^2$ 145623 215634 325641 435612	96 $S^1TS^3T^2S^3T^2$ 152634 253641 354612 451623
97 $S^1TSTSTS$ 561423 562134 563241 <u>564312</u> 85	98 S^1T^2STSTS 615423 625134 635241 645312	99 S^1TS^3TSTS 261534 362541 463512 164523	100 $S^1T^2S^2TSTS$ 215634 325641 435612 <u>145623</u> 95
101 S^1TST^2STS 512463 523164 534261 541362	102 $S^1T^2ST^2STS$ 652413 653124 654231 651342	103 $S^1TS^2T^2STS$ 213564 324561 431562 142563	104 $S^1T^2S^2T^2STS$ 253614 354621 451632 <u>152643</u> 80
105 $S^1TS^3T^2STS$ 314265 421365 132465 243165	106 S^1TSTS^2TS 631524 642531 613542 624513	107 $S^1T^2STS^2TS$ 135624 245631 315642 425613	108 $S^1T^2S^3TS^2TS$ 165342 265413 365124 465231
109 $S^1TST^2S^2TS$ 132564 243561 314562 421563	110 $S^1T^2ST^2S^2TS$ 532614 543621 514632 <u>521643</u> 82	111 $S^1TS^2T^2S^2TS$ 143265 214365 321465 <u>432165</u> 68	112 $S^1TS^3T^2S^2TS$ 154362 251463 352164 453261
113 $S^1T^2S^2TS^3TS$ 465132 165243 265314 <u>365421</u> 81	114 $S^1T^2S^3TS^3TS$ 625143 635214 645321 <u>615432</u> 83	115 $S^1TST^2S^3TS$ 342165 413265 124365 <u>231465</u> 61	116 $S^1TS^2T^2S^3TS$ 453162 154263 251364 352461
117 $S^1TS^3T^2S^3TS$ 524163 531264 542361 513462	118 S^1TSTST^2S 562431 563142 564213 561324	119 $S^1T^2STST^2S$ 612435 623145 634215 641325	120 $S^1TS^2TST^2S$ 263541 364512 461523 <u>162534</u> 53

121 $S^1T^2S^2TST^2S$ 213645 324615 431625 142635	122 $S^1TST^2ST^2S$ 516432 526143 536214 546321	123 $S^1T^2ST^2ST^2S$ 651432 652143 653214 <u>654321</u> 67	124 $S^1TS^2T^2ST^2S$ 216543 326514 436521 <u>146532</u> 71
125 $S^1T^2S^2T^2ST^2S$ 251643 352614 453621 154632	126 $S^1TSTS^2T^2S$ 632541 643512 614523 <u>621534</u> 55	127 $S^1T^2STS^2T^2S$ 132645 243615 314625 421635	128 $S^1T^2S^3TS^2T^2S$ 164325 261435 362145 463215
129 $S^1TST^2S^2T^2S$ 136542 246513 316524 426531	130 $S^1T^2ST^2S^2T^2S$ 531642 542613 513624 524631	131 $S^1TS^3T^2S^2T^2S$ 156324 256431 356142 456213	132 $S^1T^2S^2TS^3T^2S$ 463125 164235 261345 362415
133 $S^1T^2S^3TS^3T^2S$ 624135 631245 642315 613425	134 $S^1TS^2T^2S^3T^2S$ 456123 156234 256341 <u>356412</u> 52	135 $S^1TS^3T^2S^3T^2S$ 526134 536241 546312 <u>516423</u> 54	136 $S^1T^2STSTS^2$ 154623 251634 352641 453612
137 $S^1TS^2TSTS^2$ 615234 625341 635412 645123	138 $S^1TST^2STS^2$ 124563 231564 342561 413562	139 $S^1T^2ST^2STS^2$ 524613 531624 542631 <u>513642</u> 88	140 $S^1TS^2T^2STS^2$ 135264 245361 315462 <u>425163</u> 69
141 $S^1TS^3T^2STS^2$ 142365 213465 324165 431265	142 $S^1TSTS^2TS^2$ 315624 425631 135642 <u>245613</u> 91	143 $S^1T^2STS^2TS^2$ 356124 456231 156342 <u>256413</u> 76	144 $S^1T^2S^3TS^2TS^2$ 653142 654213 651324 <u>652431</u> 89
145 $S^1TST^2S^2TS^2$ 325164 435261 145362 <u>215463</u> 74	146 $S^1TS^3T^2S^2TS^2$ 543162 514263 521364 <u>532461</u> 59	147 $S^1TS^2T^2S^3TS^2$ 531462 542163 513264 <u>524361</u> 66	148 $S^1TS^3T^2S^3TS^2$ 241563 312564 423561 134562
149 $S^1TSTST^2S^2$ 624531 631542 642513 <u>613524</u> 63	150 $S^1T^2STST^2S^2$ 124635 231645 342615 413625	151 $S^1T^2S^2TST^2S^2$ 136245 246315 316425 <u>426135</u> 87	152 $S^1TST^2ST^2S^2$ 164532 261543 362514 463521

153 $S^1T^2S^2T^2ST^2S^2$ 516243 526314 536421 <u>546132</u>	154 $S^1T^2STS^2T^2S^2$ 326145 436215 146325 <u>216435</u> 92	155 $S^1T^2S^3TS^2T^2S^2$ 643125 614235 621345 <u>632415</u> 79	156 $S^1TST^2S^2T^2S^2$ 365142 465213 165324 <u>265431</u> 58
157 $S^1T^2ST^2S^2T^2S^2$ 316542 426513 136524 <u>246531</u> 65	158 $S^1TS^3T^2S^2T^2S^2$ 563124 564231 561342 <u>562413</u> 62	159 $S^1T^2S^2TS^3T^2S^2$ 631425 642135 613245 <u>624315</u> 86	160 $S^1T^2S^3TS^3T^2S^2$ 241635 312645 423615 134625
161 $S^1T^2STSTS^3$ 546123 516234 526341 <u>536412</u> 78	162 $S^1TS^2TSTS^3$ 152634 253641 354612 <u>451623</u> 96	163 $S^1TST^2STS^3$ 245163 315264 425361 135462	164 $S^1TS^3T^2STS^3$ 423165 134265 241365 <u>312465</u> 73
165 $S^1TS^3T^2S^3TS^3$ 415263 125364 235461 345162	166 $S^1T^2STST^2S^3$ 246135 316245 426315 136425	167 $S^1TST^2ST^2S^3$ 645132 615243 625314 <u>635421</u> 60	168 $S^1T^2S^2T^2ST^2S^3$ 162543 263514 364521 <u>461532</u> 72
169 $S^1T^2S^3TS^3T^2S^3$ 416235 126345 236415 346125	170 $S^1T^2STSTST$ 615234 625341 635412 <u>645123</u> 137	171 S^1TS^2TSTST 261345 362415 463125 <u>164235</u> 132	172 S^1TST^2STST 512634 523641 534612 541623
173 $S^1T^2ST^2STST$ 652134 653241 654312 651423	174 $S^1TS^2T^2STST$ 213645 324615 431625 <u>142635</u> 121	175 $S^1TS^3T^2STST$ 314652 421653 132654 243651	176 S^1TSTS^2TST 631245 642315 613425 <u>624135</u> 133
177 $S^1T^2STS^2TST$ 135246 245316 315426 425136	178 $S^1T^2S^3TS^2TST$ 165423 265134 365241 465312	179 $S^1TST^2S^2TST$ 132645 243615 314625 <u>421635</u> 127	
180 $S^1TS^3T^2S^2TST$ 154623 251634 352641 <u>453612</u> 136	181 $S^1TS^2T^2S^3TST$ 453621 154632 251643 <u>352614</u> 125	182 $S^1TS^3T^2S^3TST$ 524631 531642 542613 <u>513624</u> 130	

183 S^1TSTST^2ST 562314 563421 564132 561243	184 $S^1T^2STST^2ST$ 612354 623451 634152 641253	185 $S^1T^2S^2TST^2ST$ 213456 324156 431256 142356
186 $S^1TST^2ST^2ST$ 516324 526431 536142 546213	187 $S^1T^2S^2T^2ST^2ST$ 251436 352146 453216 154326	188 $S^1T^2STS^2T^2ST$ 132456 243156 314256 421356
189 $S^1T^2S^3TS^2T^2ST$ 164253 261354 362451 463152	190 $S^1TST^2S^2T^2ST$ 136425 246135 316245 <u>426315</u> 166	191 $S^1T^2ST^2S^2T^2ST$ 531426 542136 513246 524316
192 $S^1TS^3T^2S^2T^2ST$ 156243 256314 356421 456132	193 $S^1T^2S^2TS^3T^2ST$ 463251 164352 261453 362154	194 $S^1T^2S^3TS^3T^2ST$ 624351 631452 642153 613254
195 $S^1T^2STSTS^2T$ 154236 251346 352416 453126	196 $S^1TS^2TSTS^2T$ 615342 625413 635124 645231	197 $S^1TST^2STS^2T$ 124635 231645 342615 <u>413625</u> 150
198 $S^1TS^3T^2STS^2T$ 142653 213654 324651 431652	199 $S^1TS^3T^2S^3TS^2T$ 241635 312645 423615 <u>134625</u> 160	200 $S^1T^2STST^2S^2T$ 124356 231456 342156 413256
201 $S^1TST^2ST^2S^2T$ 164325 261435 362145 <u>463215</u> 128	202 $S^1T^2S^2T^2ST^2S^2T$ 516432 526143 536214 <u>546321</u> 122	203 $S^1T^2S^3TS^3T^2S^2T$ 241356 312456 423156 134256
204 $S^1TST^2STS^3T$ 245631 315642 425613 <u>135624</u> 107	205 $S^1TS^3T^2S^3TS^3T$ 415632 125643 235614 345621	206 $S^1T^2STST^2S^3T$ 246351 316452 426153 136254

207 $S^1T^2S^3TS^3T^2S^3T$
 416352
 126453
 236154
 346251

210 $S^1TS^3T^2STST^2$
 314526
 421536
 132546
 243516

213 $S^1TSTST^2ST^2$
 562143
 563214
 564321
 561432

216 $S^1TST^2ST^2ST^2$
 516243
 526314
 536421
546132 153

219 $S^1T^2S^3TS^2T^2ST^2$
 164532
 261543
 362514
463521 152

222 $S^1T^2S^2TS^3T^2ST^2$
 463512
 164523
 261534
362541 99

225 $S^1TS^2TSTST^2T^2$
 615423
 625134
 635241
645312 98

228 $S^1T^2S^3TS^3T^2S^2T^2$
 241563
 312564
 423561
134562 148

208 $S^1TST^2STST^2$
 512346
 523416
 534126
 541236

211 $S^1T^2STS^2TST^2$
 135462
 245163
 315264
425361 163

214 $S^1T^2STST^2ST^2$
 612543
 623514
 634521
 641532

217 $S^1T^2S^2T^2ST^2ST^2$
 251364
 352461
 453162
154263 116

220 $S^1T^2ST^2S^2T^2ST^2$
 531264
 542361
 513462
524163 117

223 $S^1T^2S^3TS^3T^2ST^2$
 624513
 631524
 642531
613542 106

226 $S^1TS^3T^2STST^2T^2$
 142536
 213546
 324516
 431526

229 $S^1TS^3T^2S^3TS^3T^2$
 415326
 125436
 235146
 345216

209 $S^1T^2ST^2STST^2$
 652341
 653412
 654123
 651234

212 $S^1T^2S^3TS^2TST^2$
 165234
 265341
 365412
 465123

215 $S^1T^2S^2TST^2ST^2$
 213564
 324561
 431562
142563 103

218 $S^1T^2STS^2T^2ST^2$
 132564
 243561
 314562
421563 109

221 $S^1TS^3T^2S^2T^2ST^2$
 156432
 256143
 356214
 456321

224 $S^1T^2STSTST^2T^2$
 154362
 251463
 352164
453261 112

227 $S^1T^2STST^2S^2T^2$
 124563
 231564
 342561
413562 138

230 $S^1T^2STST^2S^3T^2$
 246513
 316524
 426531
136542 129

231 $S^1T^2S^3TS^3T^2S^3T^2$ 416523 126534 236541 346512	232 S^1TST^2STSTS 126534 236541 346512 <u>416523</u> 231	233 $S^1T^2ST^2STSTS$ 521634 532641 543612 514623
234 $S^1TS^3T^2STSTS$ 146352 216453 326154 436251	235 $S^1T^2STS^2TSTS$ 352146 453216 154326 <u>251436</u> 187	236 $S^1T^2S^3TS^2TSTS$ 654123 651234 652341 <u>653412</u> 209
237 S^1TSTST^2STS 623514 634521 641532 <u>612543</u> 214	238 $S^1T^2STST^2STS$ 123654 234651 341652 412653	239 $S^1T^2S^2TST^2STS$ 134256 241356 312456 <u>423156</u> 203
240 $S^1TST^2ST^2STS$ 163524 264531 361542 462513	241 $S^1T^2S^2T^2ST^2STS$ 514236 521346 532416 543126	242 $S^1T^2STS^2T^2STS$ 324156 431256 142356 <u>213456</u> 185
243 $S^1T^2S^3TS^2T^2STS$ 642153 613254 624351 <u>631452</u> 194	244 $S^1T^2ST^2S^2T^2STS$ 314526 421536 132546 <u>243516</u> 210	245 $S^1TS^3T^2S^2T^2STS$ 562143 563214 564321 <u>561432</u> 213
246 $S^1T^2S^2TS^3T^2STS$ 632451 643152 614253 621354	247 $S^1T^2S^3TS^3T^2STS$ 243651 314652 421653 <u>132654</u> 175	248 $S^1T^2STSTS^2TS$ 542136 513246 524316 <u>531426</u> 191
249 $S^1TS^2TSTS^2TS$ 153642 254613 351624 452631	250 $S^1TS^3T^2STS^2TS$ 426153 136254 246351 <u>316452</u> 206	251 $S^1T^2STST^2S^2TS$ 243156 314256 421356 <u>132456</u> 188
252 $S^1T^2S^3TS^3T^2S^2TS$ 413256 124356 231456 <u>342156</u> 200	253 $S^1TS^3T^2S^3TS^3TS$ 156432 256143 356214 <u>456321</u> 221	254 $S^1T^2STST^2S^3TS$ 463251 164352 261453 <u>362154</u> 193

255 $S^1T^2S^3TS^3T^2S^3TS$
 163452
 264153
 361254
 462351

256 $S^1TST^2STST^2S$
 123546
 234516
 341526
 412536

257 $S^1T^2ST^2STST^2S$
 523641
 534612
 541623
512634 172

258 $S^1TS^3T^2STST^2S$
 145326
 215436
 325146
 435216

259 $S^1T^2S^3TS^2TST^2S$
 652134
 653241
 654312
651423 173

260 $S^1TSTST^2ST^2S$
 621543
 632514
 643521
 614532

261 $S^1T^2STST^2ST^2S$
 125643
 235614
 345621
415632 205

262 $S^1TS^3T^2S^2T^2ST^2S$
 564132
 561243
 562314
563421 183

263 $S^1TS^3T^2STS^2T^2S$
 425136
 135246
 245316
315426 177

264 $S^1TS^3T^2S^3TS^3T^2S$
 153426
 254136
 351246
 452316

265 $S^1T^2S^3TS^3T^2S^3T^2S$
 165423
 265134
 365241
465312 178

266 $S^1T^2ST^2STSTS^2$
 216534
 326541
 436512
 146523

267 $S^1TS^3T^2STSTS^2$
 463152
 164253
 261354
362451 189

268 $S^1T^2STST^2STS^2$
 236154
 346251
 416352
126453 207

269 $S^1TST^2ST^2STS^2$
 635124
 645231
 615342
625413 196

270 $S^1T^2S^3T^2ST^2STS^2$
 142536
 213546
 324516
431526 226

271 $S^1T^2S^3TS^3T^2STS^2$
 324651
 431652
 142653
213654 198

272 $S^1TS^2TSTS^2TS^2$
 536142
 546213
 516324
526431 186

273 $S^1T^2S^3TS^3T^2S^3TS^2$
 634152
 641253
 612354
623451 184

274 $S^1TST^2STST^2S^2$
 235146
 345216
 415326
125436 229

275 $S^1TS^3T^2STST^2S^2$
 453126
 154236
 251346
352416 195

276 $S^1TSTST^2ST^2S^2$
 215643
 325614
 435621
 145632

277 $S^1TS^3T^2S^3TS^3T^2S^2$
 534126
 541236
 512346
523416 208

278 $S^1T^2ST^2STSTS^2$
 165234
 265341
 365412
465123 212

279 $S^1TSTST^2ST^2S^3$ 156243 256314 356421 <u>456132</u> 192	280 $S^1T^2ST^2STSTST$ 521346 532416 543126 <u>514236</u> 241	281 $S^1TS^3T^2STSTST$ 146523 216534 326541 <u>436512</u> 266
282 $S^1T^2STST^2STST$ 123546 234516 341526 <u>412536</u> 256	283 $S^1TST^2ST^2STST$ 163245 264315 361425 462135	284 $S^1T^2S^2T^2ST^2STST$ 514362 521463 532164 543261
285 $S^1T^2S^2TS^3T^2STST$ 632514 643521 614532 <u>621543</u> 260	286 $S^1TS^2TSTS^2TST$ 153426 254136 351246 <u>452316</u> 264	287 $S^1T^2S^3TS^3T^2S^3TST$ 163524 264531 361542 <u>462513</u> 240
288 $S^1TST^2STST^2ST$ 123465 234165 341265 412365	289 $S^1TS^3T^2STST^2ST$ 145263 215364 325461 435162	290 $S^1TSTST^2ST^2ST$ 621435 632145 643215 614325
291 $S^1TS^3T^2S^3TS^3T^2ST$ 153264 254361 351462 452163	292 $S^1T^2ST^2STSTS^2T$ 216345 326415 436125 146235	293 $S^1TSTST^2ST^2S^2T$ 215436 325146 435216 <u>145326</u> 258
294 $S^1TST^2ST^2STST^2$ 163452 264153 361254 <u>462351</u> 255	295 $S^1T^2S^2T^2ST^2STST^2$ 514623 521634 532641 <u>543612</u> 233	296 $S^1TST^2STST^2ST^2$ 123654 234651 341652 <u>412653</u> 238
297 $S^1TS^3T^2STST^2ST^2$ 145632 215643 325614 <u>435621</u> 276	298 $S^1TSTST^2ST^2ST^2$ 621354 632451 643152 <u>614253</u> 246	299 $S^1TS^3T^2S^3TS^3T^2ST^2$ 153642 254613 351624 <u>452631</u> 249
300 $S^1T^2ST^2STSTS^2T^2$ 216453 326154 436251 <u>146352</u> 234	301 $S^1TST^2ST^2STSTS$ 632145 643215 614325 <u>621435</u> 290	302 $S^1T^2S^2T^2ST^2STSTS$ 143562 214563 321564 432561

303 $S^1TST^2STST^2STS$ 234165 341265 412365 <u>123465</u> 288	304 $S^1TS^3T^2STST^2STS$ 452163 153264 254361 <u>351462</u> 291	305 $S^1TSTST^2ST^2STS$ 214635 321645 432615 143625
306 $S^1TS^3T^2S^3TS^3T^2STS$ 532164 543261 514362 <u>521463</u> 284	307 $S^1T^2ST^2STSTS^2TS$ 163245 264315 361425 <u>462135</u> 283	308 $S^1T^2S^2T^2ST^2STSTS^2$ 435162 145263 215364 <u>325461</u> 289
309 $S^1TSTST^2ST^2STS^2$ 146235 216345 326415 <u>436125</u> 292	310 $S^1T^2S^2T^2ST^2STSTST$ 143625 214635 321645 <u>432615</u> 305	311 $S^1TSTST^2ST^2STST$ 214356 321456 432156 143256
312 $S^1TSTST^2ST^2STST^2$ 214563 321564 432561 <u>143562</u> 302	313 $S^1TSTST^2ST^2STSTS$ 143256 214356 321456 <u>432156</u> 311	

Relations :

- 1) $S^4 = 1.$
- 2) $T^3 = 1.$
- 3) 26/17 $TS^3TSTS^3TS = 1.$
- 4) 33/10 $T^2S^3T^2ST^2S^3T^2S = 1.$
- 5) 36/19 $TS^2TS^2TS^2TS^2 = 1.$
- 6) 42/12 $T^2S^2T^2S^2T^2S^2T^2S^2 = 1.$
- 7) 44/21 $TSTS^3TSTS^3 = 1.$
- 8) 49/14 $T^2ST^2S^3T^2ST^2S^3 = 1.$
- 9) 56/32 $T^2S^3TSTS^3TST^2 = 1.$
- 10) 64/41 $T^2S^2TS^2TS^2TS^2T^2 = 1.$
- 11) 70/48 $T^2STS^3TSTS^3T^2 = 1.$
- 12) 84/27 $TS^3T^2ST^2S^3T^2ST = 1.$
- 13) 90/37 $TS^2T^2S^2T^2S^2T^2S^2T = 1.$
- 14) 94/45 $TST^2S^3T^2ST^2S^3T = 1.$

- 15) 97/85 $TSTSTSTS^2T^2S^3T^2S^2 = 1.$
- 16) 100/95 $T^2S^2TSTSTSTS^2T^2S^3 = 1.$
- 17) 104/80 $T^2S^2T^2STSTS^3TS^3T^2S^2 = 1.$
- 18) 110/82 $T^2ST^2S^2TSTS^3TS^2T^2S^3 = 1.$
- 19) 111/68 $TS^2T^2S^2TST^2S^2TS^2T^2S = 1.$
- 20) 113/81 $T^2S^2TS^3TSTS^3TS^3T = 1.$
- 21) 114/83 $T^2S^3TS^3TSTS^3TS^2T = 1.$
- 22) 115/61 $TST^2S^3TST^2S^3TST^2S^3 = 1.$
- 23) 120/53 $TS^2TST^2ST^2S^3T^2S^3TS^2 = 1.$
- 24) 123/67 $T^2ST^2ST^2ST^2S^2TS^3TS^2 = 1.$
- 25) 124/71 $TS^2T^2ST^2ST^2ST^2S^2TS^3 = 1.$
- 26) 126/55 $TSTS^2T^2ST^2S^3T^2S^2TS^3 = 1.$
- 27) 134/52 $TS^2T^2S^3T^2ST^2S^3T^2S^3T^2 = 1.$
- 28) 135/54 $TS^3T^2S^3T^2ST^2S^3T^2S^2T^2 = 1.$
- 29) 139/88 $T^2ST^2STS^2TS^2TS^3T^2S^3 = 1.$
- 30) 140/69 $TS^2T^2STS^2T^2S^2TST^2S^2 = 1.$
- 31) 142/91 $TSTS^2TS^2TS^2TST^2 = 1.$
- 32) 143/76 $T^2STS^2TS^2TS^3T^2S^3T^2S = 1.$
- 33) 144/89 $T^2S^3TS^2TS^2TS^2TS^3T = 1.$
- 34) 145/74 $TST^2S^2TS^2T^2STS^2T^2S^2 = 1.$
- 35) 146/59 $TS^3T^2S^2TS^2T^2S^3TS^2T^2S^2 = 1.$
- 36) 147/66 $TS^2T^2S^3TS^2T^2S^2TS^3T^2S^2 = 1.$
- 37) 149/63 $TSTST^2S^2T^2S^2T^2S^3TS^3 = 1.$
- 38) 151/87 $T^2S^2TST^2S^2TS^2T^2STS^2 = 1.$
- 39) 154/92 $T^2STS^2T^2S^2TST^2S^2TS^2 = 1.$
- 40) 155/79 $T^2S^3TS^2T^2S^3TS^3T^2S^2TS^2 = 1.$
- 41) 156/58 $TST^2S^2T^2S^2T^2S^3TS^3TS = 1.$
- 42) 157/65 $T^2ST^2S^2T^2S^2T^2S^2T^2ST = 1.$
- 43) 158/62 $TS^3T^2S^2T^2S^2T^2S^2T^2S^3T^2 = 1.$
- 44) 159/86 $T^2S^2TS^3T^2S^2TS^2T^2S^3TS^2 = 1.$

- 45) 161/78 $T^2STSTS^3TS^3T^2S^2T^2S^2 = 1.$
- 46) 162/96 $TS^2TSTS^3TSTST^2 = 1.$
- 47) 164/73 $TS^3T^2STS^3T^2STS^3T^2S = 1.$
- 48) 167/60 $TST^2ST^2S^3T^2S^3TS^2TS^2 = 1.$
- 49) 168/72 $T^2S^2T^2ST^2S^3T^2ST^2ST = 1.$
- 50) 170/137 $T^2STSTSTS^2T^2S^3T^2S^2T^2 = 1.$
- 51) 171/132 $TS^2TSTSTS^3TST^2S^2TS^2 = 1.$
- 52) 174/121 $TS^2T^2STSTS^3TS^3T^2S^2T = 1.$
- 53) 176/133 $TSTS^2TSTS^3TST^2STS^3 = 1.$
- 54) 179/127 $TST^2S^2TSTS^3TS^2T^2S^3T = 1.$
- 55) 180/136 $TS^3T^2S^2TSTS^2T^2S^3T^2S^3T = 1.$
- 56) 181/125 $TS^2T^2S^3TSTS^3TS^3TS^2TS^2 = 1.$
- 57) 182/130 $TS^3T^2S^3TSTS^3TS^2TS^3TS = 1.$
- 58) 190/166 $TST^2S^2T^2STSTS^3T^2S^3TS = 1.$
- 59) 197/150 $TST^2STS^2TS^2TS^3T^2S^3T = 1.$
- 60) 199/160 $TS^3T^2S^3TS^2TS^2TST^2ST = 1.$
- 61) 201/128 $TST^2ST^2S^2TS^3TS^2T^2ST = 1.$
- 62) 202/122 $T^2S^2T^2ST^2S^2TS^3TS^3TS^3T^2 = 1.$
- 63) 204/107 $TST^2STS^3TS^3T^2S^2T^2S^3TS^3 = 1.$
- 64) 211/163 $T^2STS^2TST^2ST^2S^3TS^3T^2S = 1.$
- 65) 215/103 $T^2S^2TST^2ST^2S^3T^2S^3TS^2T^2 = 1.$
- 66) 216/153 $TST^2ST^2ST^2S^2TS^3TS^2T = 1.$
- 67) 217/116 $T^2S^2T^2ST^2ST^2S^3T^2STS^2T^2S^2 = 1.$
- 68) 218/109 $T^2STS^2T^2ST^2S^3T^2S^2TS^3T^2 = 1.$
- 69) 219/152 $T^2S^3TS^2T^2ST^2S^2TS^3TS^3T^2 = 1.$
- 70) 220/117 $T^2ST^2S^2T^2ST^2S^3T^2STST^2S^3 = 1.$
- 71) 222/99 $T^2S^2TS^3T^2ST^2S^3T^2S^3T^2S^2T^2S^2 = 1.$
- 72) 223/106 $T^2S^3TS^3T^2ST^2S^3T^2S^2T^2S^3T^2S = 1.$
- 73) 224/112 $T^2STSTS^2T^2S^3T^2S^2TST^2 = 1.$
- 74) 225/98 $TS^2TSTS^2T^2S^3T^2S^3T^2S^3T = 1.$

75)	227/138	$T^2STST^2S^2T^2S^2T^2S^3TS^3T^2$	$= 1.$
76)	228/148	$T^2S^3TS^3T^2S^2T^2S^2T^2STST^2$	$= 1.$
77)	230/129	$T^2STST^2S^3T^2S^2TS^2TS^3T^2S^3$	$= 1.$
78)	232/231	$TST^2STSTSTSTST^2STS^3$	$= 1.$
79)	235/187	$T^2STS^2TSTST^2S^3TS^3TS^2TS^3$	$= 1.$
80)	236/209	$T^2S^3TS^2TSTSTS^3T^2S^3TS^3TS^2$	$= 1.$
81)	237/214	$TSTST^2STSTS^3TS^3T^2S^3TS^3$	$= 1.$
82)	239/203	$T^2S^2IST^2STST^2S^2TST^2STS$	$= 1.$
83)	242/185	$T^2STS^2T^2STST^2S^3TS^3T^2S^2TS^3$	$= 1.$
84)	243/194	$T^2S^3TS^2T^2STST^2S^3TST^2STS^2$	$= 1.$
85)	244/210	$T^2ST^2S^2T^2STSTS^3T^2S^3TST^2$	$= 1.$
86)	245/213	$TS^3T^2S^2T^2STSTS^3TS^3T^2S^3T^2$	$= 1.$
87)	247/175	$T^2S^3TS^3T^2STST^2S^3T^2S^3TST^2S$	$= 1.$
88)	248/191	$T^2STSTS^2TST^2S^3TS^2TS^3TS^3$	$= 1.$
89)	250/206	$TS^3T^2STS^2TST^2STS^3T^2S^3TS^2$	$= 1.$
90)	251/188	$T^2STST^2S^2TST^2S^3TS^2T^2S^3TS^3$	$= 1.$
91)	252/200	$T^2S^3TS^3T^2S^2TST^2S^2TS^3T^2S^3TS$	$= 1.$
92)	253/221	$TS^3T^2S^3TS^3TSTS^3TS^2TST^2$	$= 1.$
93)	254/193	$T^2STST^2S^3TST^2S^3TST^2S^2T$	$= 1.$
94)	257/172	$T^2ST^2STST^2ST^2S^3T^2S^3TS^3T^2S^3$	$= 1.$
95)	259/173	$T^2S^3TS^2TST^2ST^2S^3T^2S^3TS^3T$	$= 1.$
96)	261/205	$T^2STST^2ST^2ST^2STST^2S^3$	$= 1.$
97)	262/183	$TS^3T^2S^2T^2ST^2ST^2S^3TS^3T^2S^3T^2S^2$	$= 1.$
98)	263/177	$TS^3T^2STS^2T^2ST^2S^3T^2S^2T^2S^3TS$	$= 1.$
99)	265/178	$T^2S^3TS^3T^2S^3T^2ST^2S^3T^2S^2T^2ST$	$= 1.$
100)	267/189	$TS^3T^2STSTS^2T^2S^3TS^2T^2STS$	$= 1.$
101)	268/207	$T^2STST^2STS^2T^2STST^2STS^2$	$= 1.$
102)	269/196	$TST^2ST^2STS^2T^2S^2T^2S^3T^2S^2T^2S^2$	$= 1.$
103)	270/226	$T^2S^2T^2ST^2STS^2TS^2T^2S^3TST^2$	$= 1.$
104)	271/198	$T^2S^2TS^3T^2STS^2T^2S^2T^2S^3TST^2S^2$	$= 1.$

- 105) 272/186 $TS^2TSTS^2TS^2T^2S^3TS^3TS^3T^2S^2 = 1.$
- 106) 273/184 $T^2S^3TS^3T^2S^3TS^2T^2S^3TS^3T^2S^3TS^2 = 1.$
- 107) 274/229 $TST^2STST^2S^2TST^2STST^2S^2 = 1.$
- 108) 275/195 $TS^3T^2STST^2S^2T^2S^2T^2S^3T^2S^3TS = 1.$
- 109) 277/208 $TS^3T^2S^3TS^3T^2S^2TS^3T^2S^3TS^3T^2S^2 = 1.$
- 110) 278/212 $T^2ST^2STSTS^3TS^3T^2S^2T^2ST = 1.$
- 111) 279/192 $TSTST^2ST^2S^3T^2S^3TS^2TS^2 = 1.$
- 112) 280/241 $T^2ST^2STSTSTS^3T^2S^3TS^3TS^2TS^3 = 1.$
- 113) 281/266 $TS^3T^2STSTSTS^2T^2S^3T^2S^3TS^3TS = 1.$
- 114) 282/256 $T^2STST^2STSTS^3TS^3T^2S^3TS^3T^2 = 1.$
- 115) 285/260 $T^2S^2TS^3T^2STSTS^3TS^3TS^3T^2S^3T^2S^3 = 1.$
- 116) 286/264 $TS^2TSTS^2TSTS^3TST^2STST^2 = 1.$
- 117) 287/240 $T^2S^3TS^3T^2S^3TSTS^3T^2S^3TS^3TS^3T^2 = 1.$
- 118) 293/258 $TSTST^2ST^2S^2TS^3TS^3T^2S^3TST^2S^3 = 1.$
- 119) 294/255 $TST^2ST^2STST^2S^3T^2STST^2ST = 1.$
- 120) 295/233 $T^2S^2T^2ST^2STST^2S^3T^2S^3T^2S^3TS^3TS = 1.$
- 121) 296/238 $TST^2STST^2ST^2S^3T^2S^3TS^3T^2S^3T = 1.$
- 122) 297/276 $TS^3T^2STST^2ST^2S^2TS^3TS^3T^2S^3T^2S = 1.$
- 123) 298/246 $TSTST^2ST^2ST^2S^3T^2S^3TST^2S^2TS = 1.$
- 124) 299/249 $TS^3T^2S^3TS^3T^2ST^2S^3T^2S^2T^2S^3T^2S^2T^2 = 1.$
- 125) 300/234 $T^2ST^2STSTS^2T^2S^3T^2S^3T^2S^3TST^2S^3 = 1.$
- 126) 301/290 $TST^2ST^2STSTST^2S^3TS^3TS^3T^2S^3T^2S^3 = 1.$
- 127) 303/288 $TST^2STST^2STST^2S^3TS^3T^2S^3TS^3T^2S^3 = 1.$
- 128) 304/291 $TS^3T^2STST^2STST^2S^3TST^2STST^2S = 1.$
- 129) 306/284 $TS^3T^2S^3TS^3T^2STST^2S^3T^2S^3TS^3TS^2TS^2 = 1.$
- 130) 307/283 $T^2ST^2STSTS^2TST^2S^3T^2S^3TS^3TS^3T^2 = 1.$
- 131) 308/289 $T^2S^2T^2ST^2STSTS^2T^2S^3TS^3T^2S^3TST^2S = 1.$
- 132) 309/292 $TSTST^2ST^2STSTS^2T^2S^2T^2S^3T^2S^3TS^3TS = 1.$
- 133) 310/305 $T^2S^2T^2ST^2STSTSTS^3T^2S^3TS^3TS^3T^2S^3T^2S = 1.$
- 134) 312/302 $TSTST^2ST^2STST^2S^3T^2S^3T^2S^3TS^3TS^2TS^3 = 1.$
- 135) 313/311 $TSTST^2ST^2STSTST^2S^3T^2S^3TS^3TS^3T^2S^3T^2S = 1.$

Elimination:

(4) est équivalente à (3). (6) est équivalente à (5).

(7) est équivalente à (3). (8) est équivalente à (4).

(9) est équivalente à (3). (10) est équivalente à (5).

(11) est équivalente à (3). (12) est équivalente à (4).

(13) est équivalente à (6). (14) est équivalente à (4).

(16) est équivalente à (15).

$$(17) \quad T^2S^2T^2S^2(\underbrace{S^3TSTS^3TS}_3)S^2T^2S^2 = \underbrace{T^2S^2T^2S^2T^2S^2T^2S^2}_6 = 1.$$

$$(18) \quad T^2ST^2S^3(\underbrace{S^3TSTS^3TS}_3)ST^2S^3 = T^2ST^2S^3\underbrace{T^2ST^2S^3}_4 = 1.$$

$$(19) \quad \text{TS}(\text{ST}^2\text{S}^2\text{TST}) \underset{18}{(\text{TS}^2\text{TS}^2\text{T})} \text{TS} = \text{TS}(\text{TSTS}^2\text{T}^2\text{S}) \underset{15}{(\text{S}^2\text{T}^2\text{S}^2)} \text{TS} = 1.$$

(20) et (21) sont équivalentes à (3).

$$(22) \quad \underset{3}{(\text{TS}^3\text{TST})} \underset{3}{(\text{TS}^3\text{TST})} \underset{3}{(\text{TS}^3\text{TST})} = (\text{S}^3\text{T}^2\text{S}) (\text{S}^3\text{T}^2\text{S}) (\text{S}^3\text{T}^2\text{S}) = 1.$$

$$(23) \quad \text{TS}^2\text{TS}^2(\underbrace{\text{S}^3\text{T}^2\text{ST}^2\text{S}^3\text{T}^2\text{S}}_4)\text{S}^2\text{TS}^2 = \text{TS}^2\text{TS}^2(\text{T})\text{S}^2\text{TS}^2 = 1.$$

$$(24) \quad \begin{array}{c} (\text{T}^2\text{ST}^2\text{S}^3) (\text{S}^2\text{T}^2\text{ST}) (\text{TS}^2\text{TS}^2)\text{STS}^2 = \\ 18 \qquad \qquad \qquad 5 \\ \text{S}^2\text{T}^2\text{S}^3\text{T}(\text{TST}^2\text{S}^2\text{TS}^2\text{T}^2\text{STS}^2\text{T}^2\text{S}^2)\text{T}^2\text{STS}^2 = 1. \\ 19 \end{array}$$

(25) est équivalente à (24). (26) est équivalente à (18).

(27) est équivalente à (4). (28) est équivalente à (4).

$$(29) \quad \underbrace{(T^2ST^2S^3)}_4 \underbrace{(S^2TS^2TS^2TS^2)}_5 ST^2S^3 = (STS^3T) (T^2)ST^2S^3 = 1.$$

(30) est équivalente à (19). (31) est équivalente à (5).

(32) est équivalente à (29). (33) est équivalente à (5).

(34) (35) et (36) sont équivalentes à (19) et à son inverse.

(37) est équivalente à (29).

(38) (39) et (40) sont équivalentes à (19) et à son inverse.

(41) est équivalente à (37). (42) est équivalente à (6).

(43) est équivalente à (6). (44) est équivalente à (40).

(45) est équivalente à (17). (46) est équivalente à (3).

- (47) est équivalente à (22). (48) est équivalente à (17).
 (49) est équivalente à (4). (50) est équivalente à (15).
 (51) $T^2(T^2S^2TSTSTS) \underset{15}{(S^2TST^2S^2TS^2)} = T^2(STS^2T^2) \underset{19}{(TS^2T^2S^3T)} = 1.$
 (52) est équivalente à (17).
 (53) $T(TSTS^3TSTS^3) \underset{3}{S^3TSTS^3TS} = TS^3TSTS^3TS \underset{3}{=} 1.$
 (54) est équivalente à (18). (55) est équivalente à (15).
 (56) $TS^2T(TS^3TSTS^3TS) \underset{3}{S^2TS^2TS^2} = TS^2TS^2TS^2TS^2 \underset{5}{=} 1.$
 (57) $TS^3T(TS^3TSTS^3TS) \underset{3}{STS^3TS} = TS^3TSTS^3TS \underset{3}{=} 1.$
 (58) $TS^3(S^2T^2S^2T^2S^2) \underset{5}{(S^3TSTS^3T)} \underset{3}{TS^3TS} = TS^3(TS^2T) \underset{3}{(T^2S^3TS^3TS)} = 1.$
 (59) est équivalente à (29). (60) est équivalente à (23).
 (61) est équivalente à (24). (62) est équivalente à (24).
 (63) $TST(TSTS^3TS) \underset{3}{(S^2T^2S^2T^2S^2)} \underset{5}{STS^3} = TST(ST^2) \underset{3}{(TS^2T)} \underset{3}{STS^3} = 1.$
 (64) $T^2S(TS^2TST^2ST^2S^3T^2) \underset{17}{T^2S^3T^2S} = T^2S(S^2T^2S) \underset{4}{T^2S^3T^2S} = 1.$
 (65) est équivalente à (17). (66) est équivalente à (24).
 (67) $T^2(T^2S^2T^2S^2T^2S^2T^2S^2) \underset{6}{S^3T^2ST^2S^3T^2S} = T^2S^3T^2ST^2S^3T^2S \underset{4}{=} 1.$
 (68) est équivalente à (18). (69) est équivalente à (25).
 (70) $T^2ST^2S^3(S^3T^2ST^2S^3T^2ST^2) \underset{4}{T^2ST^2S^3} = T^2ST^2S^3T^2ST^2S^3 \underset{4}{=} 1.$
 (71) $T^2S^2T^2(T^2S^3T^2ST^2S^3T^2S) \underset{4}{S^2T^2S^2T^2S^2} = T^2S^2T^2S^2T^2S^2T^2S^2 \underset{6}{=} 1.$
 (72) $T^2S^3T^2(T^2S^3T^2ST^2S^3T^2S) \underset{4}{ST^2S^3T^2S} = T^2S^3T^2ST^2S^3T^2S \underset{4}{=} 1.$
 (73) est équivalente à (15). (74) est équivalente à (15).
 (75) est équivalente à (29). (76) est équivalente à (17).
 (77) $T^2ST(ST^2S^3T^2S^3TS^2TS^2) \underset{17}{ST^2S^3} = T^2ST(TS^3T^2) \underset{4}{ST^2S^3} = 1.$

$$(78) \text{ TST}^2\text{S}^3(\text{S}^2\text{TSTSTSTS}^2)\text{S}^3\text{T}^2\text{STS}^3 = \text{TST}^2\text{S}^3(\text{TST})\text{S}^3\text{T}^2\text{STS}^3 = \\ \text{TST}(\text{TS}^3\text{TSTS}^3\text{T})\text{TSTS}^3 = \text{TSTS}^3\text{TSTS}^3 = 1.$$

$$(79) \text{ T}^2\text{ST}^2(\text{T}^2\text{S}^2\text{TSTS}^3) (\text{S}^2\text{T}^2\text{S}^3\text{TS}^3\text{TS})\text{STS}^3 = \\ \text{T}^2\text{ST}^2(\text{S}^3\text{TSTS}^2\text{T}^2) (\text{TS}^2\text{TS}^3\text{T}^2)\text{STS}^3 = \text{T}^2\text{ST}^2\text{S}^3\text{T}(\text{ST}^2\text{S}^3\text{T}^2\text{S})\text{TS}^3 = \\ \text{T}^2\text{ST}^2\text{S}^3\text{T}^2\text{ST}^2\text{S}^3 = 1.$$

$$(80) \text{ T}^2\text{S}^3\text{T}^2(\text{T}^2\text{S}^2\text{TSTSTS}) (\text{S}^2\text{T}^2\text{S}^3\text{TS}^3)\text{TS}^2 = \\ \text{T}^2\text{S}^3\text{T}^2(\text{STS}^2\text{T}^2) (\text{TS}^2\text{TS}^3\text{T}^2\text{S}^3\text{T}^2)\text{TS}^2 = \text{T}^2\text{S}^3\text{T}^2\text{ST}^2\text{S}^3\text{T}^2\text{S} = 1.$$

$$(81) \text{ TSTST}^2\text{S}^3(\text{S}^2\text{TSTS}^3\text{TS}^2)\text{S}(\text{T}^2\text{S}^3\text{TS}^3) = \\ \text{TSTST}^2\text{S}^3(\text{TS}^3\text{TST})\text{S}(\text{S}^2) (\text{TS}^2\text{TS}^3\text{T}^2\text{S}^3\text{T}^2) = \\ \text{TSTST}^2\text{S}^2(\text{STS}^3\text{TSTS}^3\text{T})\text{S}^2\text{TS}^3\text{T}^2\text{S}^3\text{T}^2 = 1.$$

$$(82) \text{ T}(\text{TS}^2\text{TST}^2\text{ST}^2) (\text{T}^2\text{ST}^2\text{S}^2\text{TST})\text{TSTS} = \text{T}(\text{S}^2\text{T}^2\text{STS}) (\text{STS}^2\text{T}^2\text{S})\text{TSTS} = \\ (\text{TS}^2\text{T}^2\text{STS}^2\text{T}^2)\text{T}^2\text{S}^2\text{T}^2\text{STSTS} = \text{S}^2\text{TS}^3\text{T}^2\text{S}^2\text{T}^2\text{S}^2\text{T}^2\text{STSTS} = 1.$$

$$(83) (\text{T}^2\text{STS}^2\text{T}^2\text{S}^2) (\text{S}^3\text{TST}^2\text{S}^3\text{TS})\text{S}^2\text{T}^2\text{S}^2\text{TS}^3 = \\ (\text{S}^2\text{T}^2\text{S}^2\text{TS}^3\text{T}^2) (\text{TS}^3\text{T}^2\text{ST})\text{S}^2\text{T}^2\text{S}^2\text{TS}^3 = \text{S}(\text{ST}^2\text{S}^2\text{TS}^2\text{T}^2\text{STS}^2\text{T}^2\text{S}^2\text{T})\text{S}^3 = 1.$$

$$(84) \text{ T}^2\text{S}^2(\text{STS}^3\text{T}^2\text{STST}^2\text{S}^3\text{TS}^3)\text{S}^2\text{T}^2\text{STS}^2 = \text{T}^2\text{S}^2\text{TST}^2\text{S}^2\text{TS}^2\text{T}^2\text{STS}^2 = 1.$$

$$(85) \text{ T}^2\text{S}(\text{T}^2\text{S}^2\text{T}^2\text{STSTS}^3\text{T})\text{TS}^3\text{TST}^2 = \text{T}^2\text{S}(\text{S}^2\text{TS})\text{TS}^3\text{TST}^2 = \\ \text{T}(\text{TS}^3\text{TSTS}^3\text{TS})\text{T}^2 = 1.$$

(86) est équivalente à (17).

$$(87) (\text{T}^2\text{S}^3\text{T}^2) (\text{T}^2\text{S}^3\text{T}^2\text{ST}^2) (\text{T}^2\text{ST}^2\text{S}^3\text{T}^2\text{S})\text{S}^2\text{TST}^2\text{S} = \\ (\text{S}^3\text{TSTS}^3) (\text{S}^3\text{TS}) (\text{ST})\text{S}^2\text{TST}^2\text{S} = \text{S}^3\text{T}(\text{STS}^2\text{TS}^2\text{TS}^2\text{TS})\text{T}^2\text{S} = 1.$$

$$(88) (\text{T}^2\text{STSTS}^3) (\text{S}^3\text{TST}^2\text{S}^3\text{TS})\text{STS}^3\text{TS}^3 = (\text{S}^2\text{TS}^2\text{TST}^2) (\text{TS}^3\text{T}^2\text{ST})\text{STS}^3\text{TS}^3 = \\ \text{S}(\text{STS}^3\text{TSTS}^3\text{T})\text{S}^3 = 1.$$

$$(89) \quad \underset{29}{TS^2(ST^2STS^2TS^2)S^3T^2STS^3T^2S^3TS^2} = \underset{79}{(TS^2TSTST^2S^3)T^2STS^3T^2S^3TS^2} = \\ S^2(STST^2S^2T^2STSTS^3T^2S^3T)S^2 = \underset{29}{S^2(STST^2S^2T^2S^2)} \underset{3}{(S^3TSTS^3T)TS^3TS^2} = \\ S^2(T^2ST^2ST) \underset{3}{(T^2S^3)TS^3TS^2} = 1.$$

$$(90) \quad \underset{19}{T^2STS^3(S^2T^2S^2TST^2S^2)} \underset{16}{(STS^2T^2S^3)TS^3} = \\ T^2STS^3(T^2S^3TS^2T^2) \underset{16}{(T^2S^3T^2S^3T^2S^2T)TS^3} = \\ T^2STS^3T^2S^3 \underset{29}{(TS^2TS^3T^2S^3T^2)S^2T^2S^3} = \underset{22}{T^2STS^3T^2(ST^2S^3TST^2S^3)} = \\ T^2STS^3T^2 \underset{3}{(T^2STS^3T^2)} = \underset{3}{T(TSTS^3TSTS^3)T^2} = 1.$$

$$(91) \quad \underset{19}{T^2S^3TS(S^2T^2S^2TST^2S^2TS^2)ST^2S^3TS} = \underset{22}{T^2S^3TS(T^2S^3T)ST^2S^3TS} = 1.$$

(92) est équivalente à (3). (93) est équivalente à (22).

$$(94) \quad \underset{17}{T^2ST^2S^3(S^2TST^2ST^2S^3T^2S^3TS^2)ST^2S^3} = \underset{4}{T^2ST^2S^3(T^2)ST^2S^3} = 1.$$

(95) est équivalente à (17).

$$(96) \quad \underset{24}{T^2STS^3(S^2T^2ST^2ST^2S^2S^2)S^3TST^2S^3} = \underset{24}{T^2STS^3(T^2ST^2)S^3TST^2S^3} = \\ \underset{22}{T^2STS^3T^2(ST^2S^3TST^2S^3)} = \underset{3}{T(TSTS^3TSTS^3)T^2} = 1.$$

$$(97) \quad \underset{24}{TS^3T(TS^2T^2ST^2ST^2S)S^2TS^3T^2S^3T^2S^2} = \underset{24}{TS^3T(ST^2S^2T)S^2TS^3T^2S^3T^2S^2} = \\ \underset{5}{TS^3TST(TS^2TS^2TS^2)ST^2S^3T^2S^2} = \underset{3}{(TS^3TSTS^3)} \underset{4}{(S^3T^2ST^2S^3T^2S)S} = 1.$$

$$(98) \quad \underset{3}{TS^3T(TSTS^3)} \underset{4}{(S^3T^2ST^2S^3T^2S)ST^2S^3TS} = \underset{3}{TS^3T(ST^2S^3T^2)} \underset{3}{(T)ST^2S^3TS} = 1.$$

(99) est équivalente à (4).

$$(100) \quad \underset{15}{TS^3T(TSTSTS^2T^2S^3T^2)T^2S^2T^2STS} = \underset{15}{TS^3T(S^3T^2S^2)T^2S^2T^2STS} = \\ \underset{6}{TS^3TS(S^2T^2S^2T^2S^2T^2S^2T^2)TS^3TS} = \underset{3}{TS^3TSTS^3TS} = 1.$$

$$(101) \quad \underset{17}{(T^2STST)} \underset{18}{(TSTS^2T^2ST^2)T^2ST^2STS^2} = \\ \underset{17}{(S^2TS^2TST^2S)} \underset{18}{(ST^2S^2TS)T^2ST^2STS^2} = \\ \underset{6}{S^2TS^2TS(T^2S^2T^2S^2)TST^2ST^2STS^2} = \underset{24}{S^2T^2(T^2S^2TS^3TS^2T^2ST^2ST^2S)TS^2} = 1.$$

$$(102) \quad \underset{29}{TS(T^2ST^2STS^2T)} \underset{19}{(TS^2T^2S^3T)TS^2T^2S^2} = \\ \underset{29}{TS(STST^2S^2)} \underset{19}{(S^2TST^2S^2TS^2)TS^2T^2S^2} = \\ \underset{5}{(TS^2TS^2T)} \underset{5}{(TS^2TS^2TS^2T)TS^2} = \underset{5}{S^2T^2S^2(S^2)TS^2} = 1.$$

$$(103) \quad T^2S^3(S^3T^2ST^2STS^2TS^2T)TS^3TST^2 = T^2S^3(TST)S^3TST^2 = 1.$$

$$(104) \quad T^2S^2TS(S^2T^2STS^2T^2S^2T) \underset{19}{(TS^3TST)TS^2} = \\ T^2S^2TS(T^2S^2TS^3) \underset{19}{(S^3T^2S)TS^2} = T^2S^2TST^2S^2TS^2T^2STS^2 = 1.$$

$$(105) \quad TS^2TS^3(S^2TS^2TS^2T) \underset{5}{(TS^3TS^3TS^3T)TS^2} = \\ TS^2TS^3(T^2S^2) \underset{5}{(S^2TS^3TS^3)TS^2} = TS^2TS^2TS^2TS^2 = 1.$$

(106) est équivalente à (101).

$$(107) \quad TS^2(S^3T^2STST^2S^2TST^2S^3)S^2TST^2S^2 = TS^2(T^2STS^2T^2)S^2TST^2S^2 = 1.$$

$$(108) \quad (TS^3T) \underset{3}{(TSTST^2S^2T^2S^2)T^2S^3T^2S^3TS} = \\ (S^3T^2ST^2S^3) \underset{29}{(ST^2ST)T^2S^3T^2S^3TS} = 1.$$

$$(109) \quad (TS^3T^2S^3TS^3T) \underset{94}{(TS^2TS^3T^2S^3T^2)T^2S^3T^2S^2} = \\ (ST^2S^3T^2S^3TS^3T^2S^3) \underset{29}{(S^2T^2S^2TS^3)T^2S^3T^2S^2} = \\ S^2(S^3T^2S^3T^2S^3T^2) \underset{15}{(T^2S^3T^2ST^2S^3T^2)} \underset{4}{(T^2S^3)} \underset{4}{(T^2S^3T^2S^2)} = \\ S^2(TS^2T^2S^3T^2S^2) \underset{15}{(S^3)} \underset{4}{(S^3TST)S^2T^2S^2} = 1.$$

(110) est équivalente à (17). (111) est équivalente à (23).

$$(112) \quad T^2ST(TSTSTSTS^2)ST^2S^3TS^3TS^2TS^3 = \\ \underset{15}{T^2ST(S^2TST)ST^2S^3TS^3TS^2TS^3} = 1.$$

$$(113) \quad TS^3T(TSTSTSTS^2T^2S^3T^2S^2)STS^3TS = TS^3TSTS^3TS = 1.$$

$$(114) \quad T^2STS^3(S^2T^2STSTS^3TS^3T^2S^2)STS^3T^2 = T^2STS^3(T)STS^3T^2 = 1.$$

$$(115) \quad T^2S^2TS(S^2T^2STSTS^3TS^3T^2)T^2S^3T^2S^3T^2S^3 = \\ \underset{17}{T^2S^2TS(TS^2)T^2S^3T^2S^3T^2S^3} = 1.$$

$$(116) \quad TS^2TSTS^3(S^3TSTS^3TST)TSTST^2 = TS^3(S^3TSTS^3TST)ST^2 = 1.$$

$$(117) \quad (TS^3TS^3TS^3TS^2)ST \underset{24}{(TS^3TSTS^3T)TS^3} = S^2TS^3T(ST) \underset{3}{(S^3)TS^3} = 1.$$

- (118) $TSTS^2(S^3T^2ST^2S^3) \overset{4}{(S^3TS^3TS^3T)} \overset{24}{(TS^3TST)TS^3} =$
 $TSTS^2(TS^3T) \overset{24}{(T^2S^2TS^3TS^2)} \overset{3}{(S^3T^2S)TS^3} =$
 $TSTS^3(S^3TSTS^3TST)TSTS^3 \overset{3}{=} TSTS^3TSTS^3 \overset{3}{=} 1.$
- (119) $TST^2S^2(S^3T^2STST^2S^3T^2S^3)S^2TST^2ST = TST^2S^2(TST^2S^2T^2)S^2TST^2ST =$
 $TS(T^2S^2TST^2S^3)T^2S^2TST^2ST \overset{77}{=} TS(S^2T^2S^3TS^2T^2)T^2S^2TST^2ST =$
 $TS^3T^2S(S^2TS^2TS^2TS^2)S^3T^2ST \overset{19}{=} TS^3T^2S(T^2)S^3T^2ST \overset{4}{=} 1.$
- (120) $T^2S^2T^2S^2(S^3T^2STST^2S^3T^2S^3T)TS^3TS^3TS =$
 $T^2S^2T^2S^2(TST^2S^2)TS^3TS^3TS \overset{77}{=} T^2(S^2T^2S^2TST^2S^2T)S^3TS^3TS \overset{19}{=}$
 $T^2(T^2S^3TS^2)S^3TS^3TS \overset{3}{=} 1.$
- (121) $TST^2STS^2(S^3T^2ST^2S^3T^2S)S^2TS^3T^2S^3T = TST^2STS^2(T)S^2TS^3T^2S^3T =$
 $TST^2S^3(S^2TS^2TS^2TS^2)ST^2S^3T \overset{4}{=} TST^2S^3T^2ST^2S^3T \overset{5}{=} 1.$
- (122) $(TS^3T^2STST^2S^2) \overset{108}{(S^3T^2S^2TS^2)} \overset{19}{(STS^3T)TS^3T^2S} =$
 $(S^3T^2STSTS^2T) \overset{6}{(T^2S^2TS^2T^2ST)} \overset{3}{(T^2ST^2S^3)TS^3T^2S} =$
 $S^3T^2STS(T^2S^2T^2S^2T^2)S^3TS^3T^2S \overset{6}{=} S^3T^2STS(S^2TS^2)S^3TS^3T^2S =$
 $S^3T(TSTS^3TSTS^3)T^2S \overset{3}{=} 1.$
- (123) $TST^2(T^2ST^2ST^2ST^2S^2) \overset{24}{(ST^2S^3TST^2S^3)} \overset{22}{S^3TS} =$
 $TST^2(S^2T^2ST^2) \overset{17}{(T^2STS^3T^2)S^3TS} = TS(T^2S^2T^2STSTS^3)T^3S^3TS =$
 $TS(S^2TST^2)T^2S^3TS \overset{3}{=} 1.$
- (124) $TS^2(ST^2S^3T^2) \overset{4}{(T^2S^3T^2ST^2S^3T^2S)} \overset{4}{(ST^2S^3T^2S)ST^2} =$
 $TS^2(TSTS^3) \overset{3}{(TST)ST^2} = TS^2(TSTS^3TSTS^3)S^2T^2 \overset{4}{=} 1.$
- (125) $T^2ST^2STS(TS^2T^2S^3T^2S^3T^2S^3T^2)T^2ST^2S^3 =$
 $T^2ST^2STS(S^3T^2S^2)T^2ST^2S^3 \overset{15}{=} T^2ST^2S^3T^2ST^2S^3 \overset{4}{=} 1.$

$$(126) \text{ TST}^2\text{ST}(\text{TSTSTST}) \text{ (TS}^3\text{TS}^3\text{TS}^3\text{T})\text{TS}^3\text{T}^2\text{S}^3 =$$

$$\begin{array}{cc} 15 & 24 \\ \text{TST}^2\text{ST}(\text{S}^2\text{TST}^2\text{S}^2) & (\text{S}^2\text{TS}^3\text{TS}^2)\text{TS}^3\text{T}^2\text{S}^3 = \\ \text{T}(\text{ST}^2\text{STS}^2\text{TS}^2) & (\text{S}^3\text{T}^2\text{S}^3\text{TS}^2\text{TS}^2)\text{ST}^2\text{S}^3 = \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 29 & 17 \\ \text{T}(\text{TSTST}^2) & (\text{TS}^3\text{TS}^3\text{T}^2)\text{ST}^2\text{S}^3 = \text{T}^2\text{ST}^2\text{S}^3\text{T}^2\text{ST}^2\text{S}^3 = 1. \\ & 4 \end{array}$$

$$(127) (\text{TST}^2\text{S}^3) \text{ (S}^2\text{TST}^2\text{ST}^2) \text{ (T}^2\text{ST}^2\text{S}^3\text{T}^2) \text{ (T}^2\text{S}^3\text{T}^2\text{S})S}^2\text{TS}^3\text{T}^2\text{S}^3 =$$

$$\begin{array}{cccc} 22 & 17 & 4 & 4 \\ (\text{STS}^3\text{T}^2\text{STS}^3\text{T}^2) & (\text{T}^2\text{S}^2\text{T}^2\text{STS}) & (\text{STS}^3) & (\text{S}^3\text{TST})\text{S}^2\text{TS}^3\text{T}^2\text{S}^3 = \\ \text{STS}^3\text{T}^2\text{STS}^3\text{TS} & (\text{ST}^2\text{STS}^2\text{TS}^2\text{TS}^3) & (\text{S}^2\text{TS}^2\text{T})\text{S}^3\text{T}^2\text{S}^3 = \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 29 & 5 \\ \text{STS}^3\text{T}^2\text{STS}^3\text{TS} & (\text{T}^2\text{S}^2\text{T}^2\text{S}^2)\text{S}^3\text{T}^2\text{S}^3 = \\ \text{STS}^3\text{T} & (\text{TSTS}^3\text{TSTS}^3)\text{T}^2\text{ST}^2\text{S}^3 = 1. \\ & 3 \end{array}$$

$$(128) \text{TS}^2 \text{ (ST}^2\text{STST}^2\text{STST}^2\text{S}^3\text{TS}^3) \text{ (S}^2\text{T}^2\text{STST}^2\text{S}^3)\text{S}^2 =$$

$$\begin{array}{cc} 127 & 83 \\ \text{TS}^2(\text{T}^2\text{STST}^2\text{ST}) & (\text{T}^2\text{S}^3\text{TST}^2\text{S}^2\text{TST}^2)\text{S}^2 = \text{TS}^2\text{T}^2\text{STS}^2\text{T}^2\text{S}^2\text{TST}^2\text{S}^2 = 1. \\ & 19 \end{array}$$

$$(129) \text{TS}^3\text{T}^2\text{S}^3\text{T}^2(\text{T}^2\text{S}^3\text{T}^2\text{ST}^2) \text{ (T}^2\text{ST}^2\text{S}^3\text{T}^2)\text{T}^2(\text{TS}^3\text{TS}) \text{ (S}^2\text{TS}^2\text{TS}^2) =$$

$$\begin{array}{cccc} 4 & 4 & 3 & 5 \\ \text{TS}^3\text{T}^2\text{S}^3\text{T}^2(\text{S}^3\text{TS}) & (\text{STS}^3)\text{T}^2(\text{S}^3\text{T}^2\text{ST}^2) & (\text{T}^2\text{S}^2\text{T}^2) = \\ \text{TS}^2(\text{ST}^2\text{S}^3\text{T}^2\text{S}) & (\text{S}^2\text{TS}^2\text{TS}^3\text{T}^2\text{S}^3\text{T}^2\text{ST})\text{S}^2\text{T}^2 = \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 4 & 29 \\ \text{TS}^2(\text{TST}) & (\text{T}^2\text{S}^3\text{T})\text{TS}^2\text{T}^2 = 1. \end{array}$$

$$(130) \text{T}^2\text{ST}(\text{TSTSTS}^2\text{T}^2) \text{ (T}^2\text{ST}^2\text{S}^3\text{T}^2\text{S})S}^2\text{TS}^3\text{TS}^3\text{T}^2 =$$

$$\begin{array}{cc} 15 & 4 \\ \text{T}^2\text{ST}(\text{S}^3\text{T}^2\text{S}^2\text{TS}) & (\text{ST})\text{S}^2\text{TS}^3\text{TS}^3\text{T}^2 = \\ \text{T}^2\text{STS}^3\text{T}^2(\text{S}^2\text{TS}^2\text{TS}^2\text{TS}^2)\text{STS}^3\text{T}^2 & = \text{T}(\text{TSTS}^3\text{TSTS}^3)\text{T}^2 = 1. \\ & 5 \quad 3 \end{array}$$

$$(131) (\text{T}^2\text{S}^2\text{T}^2\text{S}^2) \text{ (S}^3\text{T}^2\text{STSTS}^2\text{T}^2\text{S}^3\text{TS}^2) \text{ (ST}^2\text{S}^3\text{T}^2)\text{T}^2\text{ST}^2\text{S} =$$

$$\begin{array}{ccc} 6 & 100 & 4 \\ (\text{S}^2\text{TS}^2\text{T}) & (\text{T}^2\text{S}^3\text{T}^2\text{S}^3\text{T}) & (\text{TSTS}^3)\text{T}^2\text{ST}^2\text{S} = \text{S}^3(\text{S}^3\text{TST}^2\text{S}^3)\text{T}^2\text{STS}^3\text{T}^2\text{ST}^2\text{S} = \\ & & 22 \end{array}$$

$$\text{S}^3(\text{TS}^3\text{T}^2\text{STS}^3\text{T}^2)\text{T}^2\text{STS}^3\text{T}^2\text{ST}^2\text{S} = \text{S}^3\text{TS}^3\text{T}(\text{TSTS}^3\text{TSTS}^3)\text{T}^2\text{ST}^2\text{S} = 1.$$

$$(132) \text{TSTS}^2 \text{ (S}^3\text{T}^2\text{ST}^2\text{STS}^2\text{T}) \text{ (TS}^2\text{T}^2\text{S}^3\text{T})\text{TS}^3\text{TS}^3\text{TS} =$$

$$\begin{array}{cc} 29 & 19 \\ \text{TSTS}^2(\text{TST}^2\text{S}^2) & (\text{S}^2\text{TST}^2\text{S}^2\text{TS}^2)\text{TS}^3\text{TS}^3\text{TS} = \\ \text{T}^2(\text{T}^2\text{STS}^2\text{TS}^2\text{T}) & (\text{TS}^2\text{TS}^2\text{TS}^3\text{T}^2)\text{T}^2\text{S}^3\text{TS} = \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 29 & 29 \\ \text{T}^2(\text{S}^3\text{TSTS}) & (\text{S}^3\text{TS}^3\text{TS})\text{T}^2\text{S}^3\text{TS} = \text{T}^2(\text{S}^3\text{TST}) \text{ (TS}^3\text{TST})\text{TS}^3\text{TS} = \\ & 3 \quad 3 \end{array}$$

$$\text{T}^2(\text{T}^2\text{S}^3\text{T}^2\text{S}) \text{ (S}^3\text{T}^2\text{S})\text{TS}^3\text{TS} = \text{TS}^3\text{TSTS}^3\text{TS} = 1.$$

3

$$\begin{aligned}
 (133) \quad & \underset{24}{T(TS^2T^2ST^2S^2)} \underset{17}{(T^2STSTS^3T)} \underset{24}{(TS^3TS^3TS^3T)TS^3T^2S} = \\
 & T(ST^2S^2TS^3) \underset{15}{(S^2TS^2TS)} (S^2TS^3TS^2)TS^3T^2S = \\
 & TS^2(S^3T^2S^2TSTS^2T^2) \underset{15}{(T^2S^3TS^3TS^2TS^3T^2S)} = \\
 & TS^2(TSTS)T^2S^3TS^3TS^2TS^3T^2S = \\
 & TS^3(S^3TSTS^2S^2) \underset{29}{(STS^3TS)} \underset{3}{(STS^3T)TS} = \\
 & TS^3(T^2STS^2T) \underset{29}{(T^2ST^2)} \underset{3}{(T^2ST^2S^3)TS} = TS^3T(TSTS^3TST)TS^3TS = \\
 & TS^3TSTS^3TS = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (134) \quad & \underset{29}{(TSTST^2S^2)} \underset{87}{(S^3T^2STST^2S^3T^2S^3T)} \underset{3}{(TS^3TS)} \underset{5}{(S^2TS^2TS^2)S} = \\
 & (ST^2STS^2T) \underset{19}{(T^2STS^3TS^3)} \underset{19}{(S^3T^2ST^2)} \underset{19}{(T^2S^2T^2)S} = \\
 & ST(TSTS^3TS) \underset{3}{(S^2TS^2T^2STS^2T^2)S} = ST(ST^2) \underset{19}{(TS^3T^2S^2)S} = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (135) \quad & \underset{29}{TSTS^2(S^3T^2ST^2STS^2)} \underset{22}{(S^3TST^2S^3T)} \underset{24}{(TS^3TS^3TS^2)} \underset{4}{(ST^2S^3T^2S)} = \\
 & TSTS^2(TST^2S^2T^2) \underset{4}{(TS^3T^2STS^3)} \underset{4}{(ST^2S^2TS^3T)} \underset{4}{(TST)} = \\
 & TSTS^2TS^2(S^3T^2ST^2S^3T^2) \underset{4}{(T^2S^3T^2ST^2)T^2} = \\
 & TSTS^2TS^2(TS^3) \underset{5}{(S^3TS)T^2} = T(STS^2TS^2TS^2TS)T^2 = 1.
 \end{aligned}$$

Commentaire :

A la suite de cette élimination, il reste les cinq relations les plus simples, à savoir:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & S^4 = 1 \\
 (2) \quad & T^3 = 1 \\
 (3) \quad & TS^3TSTS^3TS = 1 \\
 (5) \quad & TS^2TS^2TS^2TS^2 = 1 \\
 (15) \quad & TSTSTSTS^2T^2S^3T^2S^2 = 1
 \end{aligned}$$

Cette dernière relation peut être transformée de la façon suivante:

$$(15') \quad (TS)^4(ST^2S^3T^2S)S = (TS)^4(TST)S = (TS)^6 = 1$$

Relations caractéristiques :

Finalement, les cinq relations caractéristiques pour la base $S_8 = (1234) T_8 = (456)$ deviennent:

$$\begin{aligned}
 (I) \quad & S^4 = 1 \\
 (II) \quad & T^3 = 1
 \end{aligned}$$

$$(b) \quad STS^3TS^4TS^4(S^3TS^4T^2) = 1$$

En comparant les expressions (a) et (b), on obtient :

$$(8) \quad \begin{aligned} T^2ST^3S^2 &= S^3TS^4T^2 \\ T^2ST^3S^2T^2ST^3S^2 &= 1 \end{aligned}$$

Éliminons la relation (11) par une méthode analogue. Nous utilisons à cet effet la relation (13). Mais, comme cette relation est une conséquence des relations (1), (2), (3), (6), (16) et que (16) est à son tour une conséquence de (1), (2), (3) et (6), nous n'introduisons aucune relation étrangère au système des huit relations de la page précédente.

$$(13) \quad \begin{aligned} S(STS^2T^3)(T^2S^2TS)S^2T &= 1 \\ S(STS^2T^3)(S^4T^3S^3T^2)S^2T &= 1 \\ (c) \quad (STS^2T^3)S^4T^3S^3T^2S^2TS &= 1 \end{aligned}$$

Écrivons à nouveau la relation (13):

$$(13) \quad \begin{aligned} S^2(T^3S^3)T^3S^2T^3S^3T^3 &= 1 \\ S^2(ST^2S^2TST^2)T^3S^2T^3S^3T^3 &= 1 \\ S^3T^2S^2TSTS^2T^3S^3T^3 &= 1 \\ (d) \quad (TS^2T^3S^4)S^4T^3S^3T^2S^2TS &= 1 \end{aligned}$$

La comparaison des égalités (c) et (d) permet de déduire :

$$(11) \quad TS^2T^3S^4 = STS^3T^3$$

Enfin, il reste à démontrer que la relation (7) est une conséquence des relations (1), (2), (3), (4) et (6). Pour ce faire, nous avons recours à nouveau à la relation (13) et aussi à la relation (11) et à la relation (8):

$$(8) \quad T^3S(ST^2ST^2)(TS^2T^3)T^3S = 1$$

$$(e) \quad T^3S(ST^2ST^2)(STS^3T^3S)T^3S = 1$$

La relation (6) peut s'écrire :

$$(f) \quad \begin{aligned} T^2(S^3T^2S^4T^3)(TS^2T)S^4T^3S &= 1 \\ T^2(TST^2S^2)(S^2T^3S^3T^3S^2)S^4T^3S &= 1 \\ T^3S(T^2S^4T^2S^4)STS^3T^3ST^3S &= 1 \end{aligned}$$

Il suffit de comparer les relations (e) et (f) pour en déduire :

$$(7) \quad (T^2S)^4 = 1$$

Les cinq relations caractéristiques de la base :

$$S_{79} = (12345) \quad T_{79} = (1436)$$

sont:

- (I) $S^5 = 1$
- (II) $T^4 = 1$
- (III) $(TS)^2 T^3 S T^3 S^3 = 1$
- (IV) $(T^2 S^2 TS)^2 = 1$
- (V) $T^2 S^4 T S T^3 S^4 T^2 S^3 = 1$

Pour l'étude de la base $S_{83} = (12354)$, $T_{83} = (123456)$ il convenait de commencer la reconstitution par T (voir remarque N° 4 p. 25). Cette reconstitution comporte 224 tableaux et 106 relations. Le système des relations caractéristiques de cette base est le suivant:

- (I) $T^6 = 1$
- (II) $S^5 = 1$
- (III) $(S^3 T^2)^2 = 1$
- (IV) $(TS)^2 T^5 S^3 T^5 S^2 = 1$
- (V) $(S^4 T)^4 = 1$

Dans les calculs précédents, comme dans tous les calculs analogues effectués par cette méthode, le système des relations caractéristiques est établi d'après la liste des relations fournies par la reconstitution du groupe. Or, il est clair qu'il existe entre S et T nombre de relations qui ne figurent pas dans cette liste. Pour ne citer qu'un exemple, les substitutions $S_8 = (1234)$, $T_8 = (456)$ satisfont à la relation:

$$(12) \quad (TSTS^2TS^3)^4 = 1$$

qui ne figure pas dans la liste des relations de cette base.

Il s'ensuit que les systèmes de relations caractéristiques que nous avons établis ne sont valables que si toute relation

$$(13) \quad g(S, T) = 1$$

est une conséquence des relations obtenues par la reconstitution du groupe.

Théorème 1. — Soit **G** un groupe d'ordre fini engendré par deux éléments générateurs S et T, respectivement d'ordre m et n. Soit (14) $f_{ij}^i(S, T) = 1$ ($j = 1, 2, \dots, l$), les relations obtenues en reconstituant le groupe **G** à partir de S et T, l désignant le nombre de ces relations et i_j désignant le nombre des lettres S et T figurant dans le premier membre de (14). Toute relation $g(S, T) = 1$ entre S et T est une conséquence des relations (14).

Démonstration.

Les seules relations (13) comportant une seule lettre S ou T sont de la forme:

$$(15) \quad S^r = 1 \quad \text{ou} \quad T^s = 1 \quad \text{où } r \text{ et } s \text{ sont entiers.}$$

Pour que ces relations soient compatibles avec les relations (14), il faut que :

$$r = r'm \quad s = s'n \quad \text{où } r' \text{ et } s' \text{ sont entiers.}$$

Les relations :

$$(16) \quad S^{r'm} = 1 \quad T^{s'n} = 1$$

découlent immédiatement des relations $S^m = 1$ ou $T^n = 1$ qui font partie des relations (14).

Si l'expression $g(S,T)$ comporte plusieurs lettres S et T , nous pouvons supposer, sans nuire à la généralité de la démonstration, que dans l'expression g figurent $2p$ lettres S et T , que cette expression commence par T et finit par S . (Voir remarque 7, page 26.)

Posons :

$$(17) \quad g(S,T) = T^{a_1} S^{a_2} T^{a_3} S^{a_4} \dots T^{a_{2p-1}} S^{a_{2p}}$$

Les exposants a_{2x} ($x = 1, 2, \dots, p$) sont compris entre 1 et $m-1$ et les exposants a_{2x-1} ($x = 1, 2, \dots, p$) sont compris entre 1 et $n-1$. Si ce n'était pas le cas, on les réduirait respectivement module m ou module n au moyen des relations $S^m = 1$ et $T^n = 1$.

D'ailleurs, dans ce qui suit, nous supposerons implicitement que tous les exposants de S sont compris entre 1 et $m-1$ et les exposants de T entre 1 et $n-1$.

Considérons successivement les expressions :

$$(18) \quad \begin{array}{llll} T & , & T^2 & , \dots , T^{a_1} \\ T^{a_1} S & , & T^{a_1} S^2 & , \dots , T^{a_1} S^{a_2} \\ T^{a_1} S^{a_2} T & , & T^{a_1} S^{a_2} T^2 & , \dots , T^{a_1} S^{a_2} T^{a_3} \\ \dots & & \dots & \dots \end{array}$$

et ainsi de suite jusqu'à :

$$T^{a_1} S^{a_2} T^{a_3} \dots T^{a_{p-1}} S, \quad T^{a_1} S^{a_2} T^{a_3} \dots T^{a_{p-1}} S^2, \dots, T^{a_1} S^{a_2} T^{a_3} \dots T^{a_{p-1}} S^{a_p}$$

si p est pair, ou :

$$T^{a_1} S^{a_2} T^{a_3} \dots S^{a_{p-1}} T, \quad T^{a_1} S^{a_2} T^{a_3} \dots S^{a_{p-1}} T^2, \dots, T^{a_1} S^{a_2} T^{a_3} \dots S^{a_{p-1}} T^{a_p}$$

si p est impair.

Une des expressions (18) comportant k facteurs S et T ($k \leq p$) :

$$(19) \quad T^{a_1} S^{a_2} T^{a_3} \dots T^{a_k-1} S^u, \quad u \leq a_k \quad \text{si } k \text{ est pair,}$$

$$(20) \quad T^{a_1} S^{a_2} T^{a_3} \dots S^{a_k-1} T^v, \quad v \leq a_k \quad \text{si } k \text{ est impair,}$$

représente nécessairement les k premiers facteurs du premier membre d'une relation (14), d'après la loi de formation de ces relations :

$$(21) \quad f_{2k, j'}^{j'}(S, T) = T^{a_1} S^{a_2} \dots T^{a_{k-1}} S^u T^{b_{k+1}} \dots T^{b_{2k-1}} S^{b_{2k}} = 1$$

si k est pair, ($j' \leq l$)

$$(22) \quad f_{2k, j''}^{j''}(S, T) = T^{a_1} S^{a_2} \dots S^{a_{k-1}} T^v S^{b_{k+1}} \dots T^{b_{2k-1}} S^{b_{2k}} = 1$$

si k est impair ($j'' \leq l$)

(Voir relations 8, 9 et remarque 7 page 26.)

Le cas $k = p$ ferait de $g(S, T)$ une relation (14). Dans ce cas, le théorème est démontré. Il reste à prouver que le théorème est vrai pour $k < p$.

Deux cas sont à envisager suivant que k est pair ou impair. Nous ferons la démonstration pour k pair. La démonstration pour k impair conduirait à des conclusions identiques. Pour k pair, deux cas sont possibles:

$$a) \quad u = a_k$$

$$b) \quad u < a_k$$

a) La relation (21) devient dans ce cas:

$$(23) \quad T^{a_1} S^{a_2} T^{a_3} \dots T^{a_{k-1}} S^{a_k} = S^{-b_{2k}} T^{-b_{2k-1}} \dots T^{-b_{k+1}}$$

Portons cette expression dans la relation (17); il vient:

$$(24) \quad g(S, T) = S^{-b_{2k}} T^{-b_{2k-1}} \dots T^{-b_{k+1}} T^{a_{k+1}} S^{a_{k+2}} \dots T^{a_{2p-1}} S^{a_{2p}}$$

$$(25) \quad g(S, T) = S^{-b_{2k}} (T^{-b_{2k-1}} \dots T^{a_{k+1}-b_{k+1}} S^{a_{k+2}} \dots T^{a_{2p-1}} S^{a_{2p}-b_{2k}}) S^{b_{2k}}$$

Pour démontrer que $g(S, T) = 1$, il suffit de prouver que:

$$(26) \quad g'(S, T) = T^{-b_{2k-1}} \dots T^{a_{k+1}-b_{k+1}} S^{a_{k+2}} \dots T^{a_{2p-1}} S^{a_{2p}-b_{2k}} = 1$$

Or, le nombre de droite comporte $2p_1 = 2p - 2$ lettres S et T au lieu de $2p$.

b) $u < a_k$. Posons $u_1 = a_k - u$.

En tenant compte de la relation (21), la relation (17) devient:

$$(27) \quad g(S, T) = S^{-b_{2k}} T^{-b_{2k-1}} \dots T^{-b_{k+1}} S^{u_1} T^{a_{k+1}} S^{a_{k+2}} \dots T^{a_{2p-1}} S^{a_{2p}}$$

Le membre de droite comporte $2p+1$ lettres S et T .

$$(28) \quad g(S, T) = S^{-b_{2k}} (T^{-b_{2k-1}} \dots T^{-b_{k+1}} S^{u_1} T^{a_{k+1}} S^{a_{k+2}} \dots T^{a_{2p-1}} S^{a_{2p}-b_{2k}}) S^{b_{2k}}$$

Pour démontrer que $g(S, T) = 1$, il suffit de prouver que:

$$(29) \quad g_1(S, T) = T^{-b_{2k-1}} \dots T^{-b_{k+1}} S^{u_1} T^{a_{k+1}} S^{a_{k+2}} \dots T^{a_{2p-1}} S^{a_{2p}-b_{2k}} = 1$$

Le membre de droite comporte $2p$ lettres S et T , mais on a $u_1 < a_k$. D'après la loi de formation des relations (14), il existe nécessairement une relation de la forme:

$$(30) \quad f_{2k, j_1}^{j_1}(S, T) = T^{-b_{2k-1}} \dots T^{-b_{k+1}} S^{u'} T^{c_{k+1}} \dots T^{c_{2k'}-1} S^{c_{2k'}} = 1$$

($k' \geq k$, $j_1 \leq l$, $u' \leq u_1$)

Quatre cas sont à distinguer:

- | | | |
|----|----------|------------|
| 1) | $k' > k$ | $u' < u_1$ |
| 2) | $k' = k$ | $u' = u_1$ |
| 3) | $k' > k$ | $u' = u_1$ |
| 4) | $k' = k$ | $u' < u_1$ |

1) Ce cas est en contradiction avec la loi de formation des relations (14).

2) La relation (30) devient:

$$(31) \quad f_{2k, j_2}^{i_2}(S, T) = T^{-b_{2k-1}} \dots T^{-b_{k+1}} S^{u_1} T^{d_k+1} \dots T^{d_{2k}-1} S^{d_{2k}} = 1$$

Ce cas est semblable à celui étudié sous a). De (31), on déduit:

$$(32) \quad T^{-b_{2k-1}} \dots T^{-b_{k+1}} S^{u_1} = S^{-d_{2k}} T^{-d_{2k}-1} \dots T^{-d_{k+1}}$$

et la relation (29) devient:

$$(33) \quad g_1(S, T) = S^{-d_{2k}} (T^{-d_{2k}-1} \dots T^{-d_{k+1}+a_{k+1}} S^{a_{k+2}} \dots T^{a_{2p}-1} S^{a_{2p}-b_{2k}-d_{2k}}) S^{d_{2k}}$$

Pour prouver que $g_1(S, T) = 1$, il faut prouver que:

$$(34) \quad g_2(S, T) = T^{-d_{2k}-1} \dots T^{-d_{k+1}+a_{k+1}} S^{a_{k+2}} \dots T^{a_{2p}-1} S^{a_{2p}-b_{2k}-d_{2k}} = 1$$

Le second membre comporte $2p_1 = 2p - 2$ lettres S et T.

3) La relation (30) devient:

$$(35) \quad f_{2k, j_3}^{i_3}(S, T) = T^{-b_{2k}-1} S^{-b_{2k}-2} \dots T^{-b_{k+1}} S^{u_1} T^{e_{k-1}} \dots T^{e_{2k'}-1} S^{e_{2k'}} = 1$$

Les seconds membres de (29) et (35) ont les mêmes $k'-1$ premiers facteurs S, T avec les mêmes exposants et on a $k'-1 > k-1$. (29) peut donc être transformée au moyen de (35) en remplaçant dans (29) les $k' > k$ premiers facteurs S et T.

4) La relation (30) devient:

$$(36) \quad f_{2k, j_4}^{i_4}(S, T) = T^{-b_{2k}-1} \dots T^{-b_{k+1}} S^{u'} T^{h_{k+1}} \dots T^{h_{2k}-1} S^{h_{2k}} = 1$$

Posons: $u_2 = u_1 - u'$

La relation (29) devient alors:

$$(37) \quad g_1(S, T) = S^{-h_{2k}} (T^{-h_{2k}-1} \dots T^{-h_{k+1}} S^{u_2} T^{a_{k+1}} S^{a_{k+2}} \dots T^{a_{2p}-1} S^{a_{2p}-b_{2k}-h_{2k}}) S^{h_{2k}}$$

L'étude de $g_1(S, T)$ est remplacée par l'étude de:

$$(38) \quad g'_1(S, T) = T^{-h_{2k}-1} \dots T^{-h_{k+1}} S^{u_2} T^{a_{k+1}} \dots T^{a_{2p}-1} S^{a_{2p}-b_{2k}-h_{2k}}$$

dont le second membre comporte $2p$ lettres S et T, mais avec:

$$u_2 < u_1 < a_k.$$

$g_1^{(a)}(S,T)$ comportant 2p lettres S et T et rentrant dans l'un des cas 1) ou 2).

Nous avons ainsi établi un algorithme qui permet de remplacer l'étude de l'expression $g(S, T)$:

soit par l'étude d'une expression $g'(S,T)$ ou $g_2(S,T)$ comportant $2p_1 = 2p-2$ lettres S et T . (Cas a et b2),

soit par l'étude d'une expression comportant $2p$ lettres S, T comme $g_1(S,T)$, mais en utilisant pour la transformer une relation (14) ayant $2k' > 2k$ lettres S, T (Cas b3).

On obtient successivement des expressions comprenant $2p, 2p_1, 2p_2, \dots$ lettres S et T ($2p > 2p_1 > 2p_2 > \dots$) en utilisant des relations (14) comportant $2k, 2k', 2k'', \dots$ lettres S et T ($2k < 2k' < 2k'' < \dots$). Du fait que $p > k$, il existe nécessairement un indice inférieur y et un indice supérieur (z) tels que:

$$2p_y = 2k^{(z)}$$

si bien que l'expression comportant $2p_y$ lettres S et T fait partie des relations (14).

c.q.f.d.

Exemple pour la base S_8, T_8 :

$$g(S,T) = (TSTS^2TS^3)^4 = 1. \quad \text{En effet:}$$

$$\begin{array}{l} \text{cas b} \quad (\text{TS} \text{TS}^2 \text{TS}^2) \text{STSTST}^2 \text{TS}^3 \text{TSTST}^2 \text{TS}^3 \text{TSTST}^2 \text{TS}^3 = \\ \quad \quad \quad 31 \\ \quad \quad \quad (\text{TS}^3 \text{T}^2 \text{S}^2 \text{T}^2) \text{STSTST}^2 \text{TS}^3 \text{TSTST}^2 \text{TS}^3 \text{TSTST}^2 \text{TS}^3 = \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{cas b3 } & (\text{TS}^3\Gamma^2\text{S}^2\text{T}^2\text{STS})\text{TS}^2\text{TS}^3\text{TSTS}^2\text{TS}^3\text{TS}'\text{TS}^2\text{TS}^3 = \\ & \quad 86 \\ & (\text{TSTST}^2\text{ST}^2)\text{TS}^2\text{TS}^3\text{TSTS}^2\text{TS}^3\text{TSTS}^2\text{TS}^3 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cas b4} \quad & (\text{TSTST}^2\text{S}^2)\text{STS}^3\text{TSTS}^2\text{TS}^3\text{TSTS}^2\text{TS}^3 = \\ & \quad 37 \\ & (\text{ST}^2\text{STS}^2\text{T})\text{STS}^3\text{TSTS}^2\text{TS}^3\text{TSTS}^2\text{TS}^3 = \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \text{cas b3} \quad S(I^2STS^2TSTS)S^2TSTS^2TS^3TSTS^2TS^3 = \\ \quad \quad \quad 79 \\ \quad \quad \quad S(ST^2S^2T^2ST^2ST)S^2TSTS^2TS^3TSTS^2TS^3 = \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{cas b2} \quad S^2(T^2S^2T^2ST^2STS^2)TSTS^2TS^3TSTS^2TS^3 = \\ \quad \quad \quad 103 \\ \quad \quad \quad S^2(TS^3T^2STS^2T^2)TSTS^2TS^3TSTS^2TS^3 = \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{cas b2} & S^2(TS^3T^2STS^3)TS^2TS^3TSTS^2TS^3 & = \\ & 47 & \\ & S^2(S^3TST^2S^3T)TS^2TS^3TSTS^2TS^3 & = \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\text{cas b2} \quad & S(\text{TST}^2\text{S}^3\text{T}^2)\text{S}^2\text{TS}^3\text{TSTS}^2\text{TS}^3 = \\
& \quad 14 \\
& S(\text{T}^2\text{STS}^3)\text{S}^2\text{TS}^3\text{TSTS}^2\text{TS}^3 = \\
\text{cas b2} \quad & S(\text{T}^2\text{STSTS}^3)\text{TSTS}^2\text{TS}^3 = \\
& \quad 45 \\
& S(\text{S}^2\text{TS}^2\text{TST}^2)\text{TSTS}^2\text{TS}^3 = \\
\text{cas b2} \quad & \text{S}^3(\text{TS}^2\text{TS}^2)\text{TS}^2\text{TS}^3 = \\
& \quad 5 \\
& \text{S}^3(\text{S}^2\text{T}^2\text{S}^2\text{T}^2)\text{TS}^2\text{TS}^3 = \\
\text{relation (16)} \quad & \text{S}^8 = 1
\end{aligned}$$

V. RÉPARTITION EN CLASSES DES BASES DU GROUPE $\mathbf{S}_6$

Au cours de ce chapitre, nous montrons que les relations caractéristiques de toutes les bases du groupe $\mathbf{S}_6$ peuvent se déduire des relations caractéristiques de quatre d'entre elles. A partir des systèmes de relations caractéristiques des bases $S_8, T_8; S_{28}, T_{28}; S_{79}, T_{79}; S_{83}, T_{83}$; étudiées dans le précédent chapitre, il est possible d'établir un système de cinq relations caractéristiques pour n'importe quelle base S, T du groupe symétrique $\mathbf{S}_6$.

Connaissant les relations caractéristiques de la base $S_{28} = (1234), T_{28} = (12)(3456)$ par exemple, il est inutile d'effectuer à nouveau tous les calculs pour la base $S_{30} = (1234), T_{30} = (12)(3654)$. On remarque, en effet, que:

$$(1) \quad \begin{aligned} S_{28} &= S_{30} \\ T_{28} &= T_{30}^{-1}. \end{aligned}$$

Pour obtenir les relations caractéristiques de la base S_{30}, T_{30} , il suffit de remplacer T par T^{-1} dans les relations caractéristiques de S_{28}, T_{28} (page 51) du système:

$$(2) \quad \begin{aligned} S^4 &= 1 \\ (T^2 S^2)^2 T^{-2} S^2 &= 1 \\ (T^3 S)^4 &= 1 \\ (TS^2)^4 &= 1 \\ TS^2 T^2 STS^3 T^3 ST^2 S^3 &= 1 \end{aligned}$$

on déduit immédiatement pour la base S_{30}, T_{30} :

$$(3) \quad \begin{aligned} S^4 &= 1 \\ (T^{-2} S^2)^2 T^2 S^2 &= 1 \\ (T^{-3} S)^4 &= 1 \\ (T^{-1} S^2)^4 &= 1 \\ T^{-1} S^2 T^{-2} ST^{-1} S^3 T^{-3} ST^{-2} S^3 &= 1 \end{aligned}$$

D'une façon générale, soient S, T et S', T' deux bases du groupe $\mathbf{S}_n$. Comme S, T est une base du groupe $\mathbf{S}_n$, S' et T' peuvent s'obtenir par composition finie de S et de T :

$$(4) \quad \begin{aligned} S' &= f'(S, T) \\ T' &= g'(S, T) \end{aligned}$$

Inversement, comme S', T' est une base de $\mathbf{S}_n$, S et T peuvent s'obtenir par composition finie de S' et de T' :

$$(5) \quad \begin{aligned} S &= f(S', T') \\ T &= g(S', T') \end{aligned}$$

Définition 8. — Etant donné deux bases S, T et S', T' du groupe $\mathbf{S}_n$, liées par les relations (4) et (5), nous dirons que les relations (4) sont *réversibles* si l'on peut déduire le système (5) du système (4) sans l'aide d'aucune autre relation entre les éléments du groupe.

Ainsi, les relations:

$$(6) \quad \begin{aligned} S' &= S^3 T S^2 T \\ T' &= S^2 T \end{aligned}$$

sont réversibles. On a:

$$\text{ou (7)} \quad \begin{aligned} S' T'^{-2} &= S^3 T S^2 T \cdot T^{-1} S^{-2} \cdot T^{-1} S^{-2} \\ S &= S' T'^{-2} \end{aligned}$$

D'autre part, la seconde relation (6) donne, en tenant compte de (7):

$$\text{ou (8)} \quad \begin{aligned} T' &= S' T'^{-2} S' T'^{-2} \cdot T \\ T &= T'^2 S'^{-1} T'^2 S'^{-1} T' \end{aligned}$$

Définition 9. — Nous dirons que deux bases S, T et S', T' , du groupe $\mathbf{S}_n$ sont de la même *classe*, si elles sont liées par un système de relations réversibles.

Au sens de cette définition, nous pouvons répartir en classes les bases du groupe $\mathbf{S}_n$, deux bases faisant partie de la même classe si, et seulement si elles sont liées par un système de relations réversibles.

Remarque 8. — Les classes ainsi obtenues sont des classes d'équivalence ¹⁾.

Théorème 2. — Deux bases semblables S, T et S', T' du groupe $\mathbf{S}_n$ sont de la même classe.

Démonstration. — Par hypothèse, les bases S, T et S', T' sont semblables. Il existe donc une substitution R telle que l'on ait soit:

$$(9) \quad \begin{aligned} S' &= R S R^{-1} \\ T' &= R T R^{-1} \end{aligned}$$

soit:

$$(10) \quad \begin{aligned} S' &= R T R^{-1} \\ T' &= R S R^{-1} \end{aligned}$$

Nous ferons la démonstration pour le premier cas, la démonstration pour le deuxième cas étant tout à fait similaire.

¹⁾ Dubreil (3) p. 18, N° 5.

Comme S, T est une base du groupe $\mathbf{S}_n$, R peut s'obtenir par composition finie de S et de T :

$$(11) \quad R = f(S, T)$$

Des relations (9), on tire immédiatement:

$$(12) \quad \begin{aligned} S &= R^{-1}S'R \\ T &= R^{-1}T'R \end{aligned}$$

où R est fonction de S et de T . Comme S', T' est aussi une base de $\mathbf{S}_n$, R peut s'obtenir par composition finie de S' et de T' :

$$(13) \quad R = g(S', T')$$

Le théorème sera démontré si nous pouvons déduire la relation (13) des systèmes (9), (11) et (12) sans l'aide d'aucune autre relation.

Or, dans (11), remplaçons S et T par leur valeur tirée de (12):

$$(14) \quad R = f(S, T) = f(R^{-1}S'R, R^{-1}T'R)$$

où R , dans le membre de droite, est fonction de S et de T . Comme:

$$(15) \quad f(R^{-1}S'R, R^{-1}T'R) = R^{-1}f(S', T')R$$

on déduit:

$$(16) \quad R = f(S, T) = R^{-1}f(S', T')R$$

d'où, en composant à gauche avec R et à droite avec R^{-1} :

$$(17) \quad R = f(S', T')$$

Nous obtenons R en fonction de S' et de T' . Ainsi la fonction f de la relation (11) est identique à la fonction g de la relation (13). R s'obtient en composant S' et T' de la même façon que S et T . Il suffit alors de remplacer R par $f(S', T')$ dans les relations (12).

c.q.f.d.

Exemple:

$$(9)' \quad \begin{aligned} S' &= S^3 T^{-2} (S) T^2 S^{-3} \\ T' &= S^3 T^{-2} (T) T^2 S^{-3} \end{aligned}$$

$$\text{avec (11)'} \quad R = S^3 T^{-2}$$

De (9)', tirons S et T :

$$(12)' \quad \begin{aligned} S &= T^2 S^{-3} (S') S^3 T^{-2} \\ T &= T^2 S^{-3} (T') S^3 T^{-2} \end{aligned}$$

Remplaçons dans (11)' S et T par leur valeur tirée de (12)':

$$(14)' \quad S^3 T^{-2} = (T^2 S^{-3} S' S^3 T^{-2})^3 (T^2 S^{-3} T' S^3 T^{-2})^{-2}$$

$$(16)' \quad S^3 T^{-2} = T^2 S^{-3} (S'^3 T'^{-2}) S^3 T^{-2}$$

$$(17)' \quad S^3 T^{-2} = S'^3 T'^{-2}$$

$$\text{d'où:} \quad S = T'^2 S'^{-3} (S') S'^3 T'^{-2}$$

$$T = T'^2 S'^{-3} (T') S'^3 T'^{-2}$$

A titre d'exemple pour le groupe S_6 , les bases:

$$S_8 = (1234) \quad T_8 = (456) \text{ et}$$

$$S_{33} = (1234) \quad T_{33} = (13)(2456)$$

sont de la même classe, car elles sont liées par les relations

$$(18) \quad S_{33} = S_8 \quad T_{33} = S_8^2 T_8$$

qui sont réversibles:

$$(19) \quad S_8 = S_{33} \quad T_8 = S_8^{-2} T_{33} = S_{33}^{-2} T_{33}$$

Par contre, les bases:

$$S_{83} = (12354) \quad T_{83} = (123456)$$

$$S_{97} = (13425) \quad T_{97} = (123456)$$

sont liées par des relations non réversibles:

$$(20) \quad S_{97} = S_{83}^2 \quad T_{97} = T_{83}$$

On ne peut, en effet, tirer S_{83} de ce système, à moins d'introduire une relation supplémentaire telle que $S_{97}^5 = S_{83}^5$.

Remarque 9. — Si deux bases S, T et S', T' du groupe S_n sont liées par des relations non réversibles, ce fait n'entraîne pas nécessairement que les bases S, T et S', T' soient de classes différentes.

$$\text{Les bases de } S_6: \quad S_7 = (123456) \quad T_7 = (14)(236)$$

$$S_{71} = (123456) \quad T_{71} = (152)$$

sont liées par le système:

$$(21) \quad S_{71} = S_7 \quad T_{71} = S_7^{-1} T_7^2 S_7$$

Ces relations ne sont pas réversibles. Pourtant les bases S_7, T_7 et S_{71}, T_{71} font partie de la même classe, car il existe entre elles les relations:

$$(22) \quad S_{71} = R S_7^{-1} R^{-1}$$

$$T_{71} = R S_7^2 T_7^{-1} R^{-1} \quad \text{avec } R = (13)(46)$$

Posons:

$$(23) \quad S' = R S_7 R^{-1} \quad T' = R T_7 R^{-1}$$

D'après le théorème 2, les bases S_7, T_7 et S', T' sont de la même classe. Le système (22) devient:

$$(24) \quad \begin{aligned} S_{71} &= S'^{-1} \\ T_{71} &= S'^3 T'^{-1} \end{aligned}$$

Ce système est réversible:

$$(25) \quad \begin{aligned} S' &= S_{71}^{-1} \\ T' &= T_{71}^{-1} S'^3 = T_{71}^{-1} S_{71}^{-3} \end{aligned}$$

Donc les bases S_7, T_7 et S_{71}, T_{71} sont de la même classe.

Remarque 10. — Soient S, T et S', T' deux bases du groupe S_n appartenant à la même classe et (26) $f_i(S, T) = 1$ ($i=1, 2, \dots, m$) un système de relations caractéristiques de la base S, T , on peut établir un système de relations caractéristiques de la base S', T' en remplaçant dans les relations (26) S et T par leur valeur en fonction de S' et de T' .

Pour connaître les relations caractéristiques de toutes les bases du groupe S_6 , il suffit de répartir les bases de ce groupe en classes et d'établir un système de relations caractéristiques pour une base de chaque classe.

Pour la répartition en classes des bases du groupe S_6 , nous avons utilisé le tableau II (p. 65). S, T étant une base de S_6 , chacun des couples d'expressions figurant dans le tableau II forme aussi une base de S_6 . Toutes ces bases sont de la même classe et sont semblables à une base du tableau I (p. 23).

Le tableau II comprend les bases $S' = f(S, T)$, $T' = g(S, T)$ où les fonctions f et g sont de la forme $S^i T^j$ ou $T^j S^i$. Les exposants i et j sont choisis de façon que les relations entre S, T et S', T' soient réversibles. Ce tableau est suffisant pour l'usage que nous en faisons et il est inutile de considérer des fonctions f et g plus complexes. Comme pour S_6 l'ordre maximum de S et de T est 6, nous n'avons pas étendu le tableau au-delà des exposants ± 3 .

Remarque 11. — La seconde colonne du tableau II s'obtient à partir de la première en changeant T en T^{-1} . La troisième colonne s'obtient à partir de la première en changeant S en S^{-1} . Enfin, la quatrième colonne s'obtient à partir de la première en changeant à la fois S en S^{-1} et T en T^{-1} .

Remarque 12. — Si les bases S, T et S, T^{-1} sont semblables, il suffit de considérer dans le tableau II les bases de numéro pair. C'est le cas, par exemple, pour la base $S_{23} = (1342)$ $T_{23} = (123456)$ car:

$$(27) \quad \begin{aligned} S_{23} &= R S_{23} R^{-1} \\ T_{23} &= R T_{23}^{-1} R^{-1} \quad \text{avec } R = (14)(23)(56) \end{aligned}$$

Remarque 13. — Si les bases S, T et S^{-1}, T sont semblables ou si les bases S, T et S^{-1}, T^{-1} sont semblables, il suffit de considérer les bases de numéro $4m$

et $4m + 1$ ($m = 0, 1, \dots, 20$). C'est le cas, en particulier, pour la base $S_4 = (123456)$, $T_4 = (13)(456)$ car :

$$(28) \quad \begin{aligned} S_4 &= RS_4^{-1}R^{-1} \\ T_4 &= RT_4^{-1}R^{-1} \end{aligned} \quad \text{avec } R = (13)(46).$$

Remarque 14. — Si les bases S, T ; S, T^{-1} et S^{-1}, T sont semblables, il suffit de considérer dans le tableau II les bases de numéro $4m$ ($m = 0, 1, \dots, 20$). C'est le cas pour $S_8 = (1234)$, $T_8 = (456)$ car :

$$(29) \quad \begin{aligned} S_8 &= RS_8R^{-1} \\ T_8 &= RT_8^{-1}R^{-1} \end{aligned} \quad \text{avec } R = (56)$$

$$(30) \quad \begin{aligned} S_8 &= RS_8^{-1}R^{-1} \\ T_8 &= RT_8R^{-1} \end{aligned} \quad \text{avec } R = (13)$$

Nous avons utilisé le tableau II, en premier lieu, pour la base S_1, T_1 , ce qui nous a permis d'obtenir un ensemble de 10 bases, à savoir :

1, 26 à 29, 31, 132 à 135.

Nous dirons que ces bases appartiennent à la classe I.

De la même façon, on démontre que la base S_2, T_2 fait partie de la même classe que les bases :

2, 3, 42, 43, 46 à 51, 90 à 101, 106 à 109, 148, 149.

Par définition, nous dirons que ces bases sont provisoirement de la classe II, aucune de ces bases ne figurant dans la classe I.

La base S_4, T_4 est de la classe I. En effet, l'application du tableau II fournit des bases de la classe I auxquelles viennent s'ajouter les bases :

4, 5, 30, 44, 45.

La base S_6, T_6 appartient à la classe III avec les bases :

6, 7, 38 à 41, 56, 57, 60 à 63, 68 à 71, 82 à 89, 110 à 117,
136 à 147, 150 à 155, 160 à 163.

Pour la base S_8, T_8 , qui ne s'est pas encore rencontrée dans les ensembles précédents, nous donnons le détail des calculs dans le tableau III (p. 66). Ces bases, obtenues grâce au tableau II font partie de la classe IV. La classe V a pour représentant la base S_9, T_9 . Comme les bases S_8, T_8 et S_9, T_9 se correspondent par un automorphisme externe du groupe S_6 , les bases obtenues à partir de S_9, T_9 correspondent aux bases de la classe IV par les automorphismes externes du groupe S_6 . Nous désignerons par V cette nouvelle classe.

La base S_{10}, T_{10} fait partie de la classe II, de même que les bases suivantes :

10 à 17, 34 à 37, 78 à 81, 126 à 129.

La base S_{22}, T_{22} est de la classe III, de même que les bases : 22 à 25 et 74 à 77.

La base S_{53}, T_{53} fait partie de la classe IV comme le prouvent les calculs du tableau IV (p. 66). A nouveau, les calculs effectués à partir de la base S_{52}, T_{52} donnent les bases de la classe V qui correspondent à celles de la classe IV par les automorphismes externes du groupe S_6 .

L'ensemble des bases indépendantes du tableau I est ainsi épuisé. Le nombre des classes du groupe S_6 est donc au plus égal à 5. La même étude faite à partir d'autres bases du tableau I n'a pas permis d'abaisser le nombre des classes. Nous pouvons résumer les résultats obtenus dans ce chapitre par le théorème suivant :

Théorème 3. — Les bases du groupe symétrique S_6 se répartissent au plus en cinq classes de la manière suivante :

La classe I comprend 15 bases, 3 de première catégorie et 12 de seconde catégorie.

La classe II comprend 48 bases, 2 de première catégorie et 46 de seconde catégorie.

La classe III comprend 62 bases, 2 de première catégorie et 60 de seconde catégorie.

La classe IV et la classe V comprennent chacune 19 bases de seconde catégorie.

Remarque 15. — Les automorphismes externes du groupe S_6 transforment en elles-mêmes les classes I, II et III. Par contre, ces automorphismes permutent les classes IV et V entre elles.

TABLEAU II

S , T	1) S , T^{-1}	2) S^{-1} , T	3) S^{-1} , T^{-1}
4) S , ST	5) S , ST^{-1}	6) S^{-1} , $S^{-1}T$	7) S^{-1} , $S^{-1}T^{-1}$
8) S , $S^{-1}T$	9) S , $S^{-1}T^{-1}$	10) S^{-1} , ST	11) S^{-1} , ST^{-1}
12) ST , T	13) ST^{-1} , T^{-1}	14) $S^{-1}T$, T	15) $S^{-1}T^{-1}$, T^{-1}
16) ST^{-1} , T	17) ST , T^{-1}	18) $S^{-1}T^{-1}$, T	19) $S^{-1}T$, T^{-1}
20) S , S^2T	21) S , S^2T^{-1}	22) S^{-1} , $S^{-2}T$	23) S^{-1} , $S^{-2}T^{-1}$
24) S , $S^{-2}T$	25) S , $S^{-2}T^{-1}$	26) S^{-1} , S^2T	27) S^{-1} , S^2T^{-1}
28) ST^2 , T	29) ST^{-2} , T^{-1}	30) $S^{-1}T^2$, T	31) $S^{-1}T^{-2}$, T^{-1}
32) ST^{-2} , T	33) ST^2 , T^{-1}	34) $S^{-1}T^{-2}$, T	35) $S^{-1}T^2$, T^{-1}
36) S , S^3T	37) S , S^3T^{-1}	38) S^{-1} , $S^{-3}T$	39) S^{-1} , $S^{-3}T^{-1}$
40) S , $S^{-3}T$	41) S , $S^{-3}T^{-1}$	42) S^{-1} , S^3T	43) S^{-1} , S^3T^{-1}
44) ST^3 , T	45) ST^{-3} , T^{-1}	46) $S^{-1}T^3$, T	47) $S^{-1}T^{-3}$, T^{-1}
48) ST^{-3} , T	49) ST^3 , T^{-1}	50) $S^{-1}T^{-3}$, T	51) $S^{-1}T^3$, T^{-1}

52) S^2T , $T^{-1}S^{-1}$	53) S^2T^{-1} , TS^{-1}	54) $S^{-2}T$, $T^{-1}S$	55) $S^{-2}T^{-1}$, TS
56) S^2T , ST	57) S^2T^{-1} , ST^{-1}	58) $S^{-2}T$, $S^{-1}T$	59) $S^{-2}T^{-1}$, $S^{-1}T^{-1}$
60) ST^2 , $T^{-1}S^{-1}$	61) ST^{-2} , TS^{-1}	62) $S^{-1}T^2$, $T^{-1}S$	63) $S^{-1}T^{-2}$, TS
64) ST^2 , ST	65) ST^{-2} , ST^{-1}	66) $S^{-1}T^2$, $S^{-1}T$	67) $S^{-1}T^{-2}$, $S^{-1}T^{-1}$
68) S^3T , $T^{-1}S^{-2}$	69) S^3T^{-1} , TS^{-2}	70) $S^{-3}T$, $T^{-1}S^2$	71) $S^{-3}T^{-1}$, TS^2
72) S^3T , S^2T	73) S^3T^{-1} , S^2T^{-1}	74) $S^{-3}T$, $S^{-2}T$	75) $S^{-3}T^{-1}$, $S^{-2}T^{-1}$
76) ST^3 , $T^{-2}S^{-1}$	77) ST^{-3} , T^2S^{-1}	78) $S^{-1}T^3$, $T^{-2}S$	79) $S^{-1}T^{-3}$, T^2S
80) ST^3 , ST^2	81) ST^{-3} , ST^{-2}	82) $S^{-1}T^3$, $S^{-1}T^2$	83) $S^{-1}T^{-3}$, $S^{-1}T^{-2}$

TABLEAU III

$$S=S_8=(1234) \quad T=T_8=(456)$$

1 $RSR^{-1}=(1234)=S_8$	$RT^{-1}R^{-1}=(456)=T_8$	$R=(56)$
2 $RS^{-1}R^{-1}=(1234)=S_8$	$RTR^{-1}=(456)=T_8$	$R=(13)$
3 $RS^{-1}R^{-1}=(1234)=S_8$	$RT^{-1}R^{-1}=(456)=T_8$	$R=(13)(56)$
4 $S=(1234)=S_{21}$	$ST=(123456)=T_{21}$	
8 $RSR^{-1}=(1432)=S_{19}$	$RS^{-1}TR^{-1}=(123456)=T_{19}$	$R=(13)$
12 $RSTR^{-1}=(123456)=S_{65}$	$RTR^{-1}=(123)=T_{65}$	$R=(14)(25)(36)$
16 $RST^{-1}R^{-1}=(123456)=S_{67}$	$RTR^{-1}=(132)=T_{67}$	$R=(14)(2536)$
20 $S=(1234)=S_{33}$	$S^2T=(13)(2456)=T_{33}$	
52 $RS^2TR^{-1}=(13)(2654)=S_{125}$	$RT^{-1}S^{-1}R^{-1}=(123456)=T_{125}$	$R=(13)(46)$
56 $S^2T=(13)(2456)=S_{123}$	$ST=(123456)=T_{123}$	
60 $RST^2R^{-1}=(123456)=S_{158}$	$RT^{-1}S^{-1}R^{-1}=(126543)=T_{158}$	$R=(135246)$
64 $RST^2R^{-1}=(123456)=S_{156}$	$RSTR^{-1}=(134562)$	$R=(135246)$

TABLEAU IV

$$S=S_{53}=(135624) \quad T=T_{53}=(123456)$$

1 $RSR^{-1}=(142653)=S_{55}$	$RT^{-1}R^{-1}=(123456)=T_{55}$	$R=(14)(23)(56)$
2 $S^{-1}=(142653)=S_{55}$	$T=(123456)=T_{55}$	
3 $RS^{-1}R^{-1}=(135624)=S_{53}$	$RT^{-1}R^{-1}=(123456)=T_{53}$	$R=(14)(23)(56)$
4 $RSTR^{-1}=(13)(2654)=S_{125}$	$RSR^{-1}=(123456)=T_{125}$	$R=(15)(236)$
5 $RST^{-1}R^{-1}=(14253)=S_{121}$	$RSR^{-1}=(123456)=T_{121}$	$R=(1342)$
8 $RS^{-1}TR^{-1}=(13524)=S_{119}$	$RSR^{-1}=(123456)=T_{119}$	$R=(14356)$
9 $RS^{-1}T^{-1}R^{-1}=(13)(2456)=S_{123}$	$RSR^{-1}=(123456)=T_{123}$	$R=(163)(245)$
12 $T^2ST^{-1}=(14)(2536)=S_{131}$	$T=(123456)=T_{131}$	
13 $RST^{-1}R^{-1}=(15432)=S_{103}$	$RT^{-1}R^{-1}=(123456)=T_{103}$	$R=(15)(24)$
16 $ST^{-1}=(12345)=S_{105}$	$T=(123456)=T_{105}$	
17 $RSTR^{-1}=(14)(2536)=S_{131}$	$RT^{-1}R^{-1}=(123456)=T_{131}$	$R=(12)(36)(45)$
20 $RS^2TR^{-1}=(1432)=S_{19}$	$RSR^{-1}=(123456)=T_{19}$	$R=(15)(236)$
21 $RS^2T^{-1}R^{-1}=(123456)=S_{158}$	$RSR^{-1}=(126543)=T_{158}$	$R=(15346)$
24 $RS^{-2}TR^{-1}=(123456)=S_{156}$	$RSR^{-1}=(134562)=T_{156}$	$R=(163245)$

25	$RS^{-2}T^{-1}R^{-1}=(1234)=S_{21}$	$RSR^{-1}=(123456)=T_{21}$	$R=(253)(46)$
28	$T^{-2}ST^{-2}=(142653)=S_{55}$	$T=(123456)=T_{55}$	
29	$RT^{-1}R^{-1}=(123456)=S_{59}$	$RST^{-2}R^{-1}=(12)=T_{59}$	$R=(26)(35)$
32	$T=(123456)=S_{59}$	$TST^3=(12)=T_{59}$	
33	$RST^2R^{-1}=(135624)=S_{53}$	$RT^{-1}R^{-1}=(123456)=T_{53}$	$R=(16)(25)(34)$
36	$RSR^{-1}=(123456)=S_{65}$	$RS^3TR^{-1}=(123)=T_{65}$	$R=(253)(46)$
37	$RSR^{-1}=(123456)=S_{67}$	$RS^3T^{-1}R^{-1}=(132)=T_{67}$	$R=(14356)$
44	$T^{-1}ST^{-2}=(15432)=S_{103}$	$T=(123456)=T_{103}$	
52	$RS^2TR^{-1}=(1234)=S_{33}$	$RT^{-1}S^{-1}R^{-1}=(13)(2456)=T_{33}$	$R=(15362)$
53	$RTS^{-1}R^{-1}=(14253)=S_{121}$	$RS^2T^{-1}R^{-1}=(123456)=T_{121}$	$R=(1452)$
56	$RS^2TR^{-1}=(1234)=S_{33}$	$RSTR^{-1}=(13)(2456)=T_{33}$	$R=(164235)$
57	$RST^{-1}R^{-1}=(13524)=S_{119}$	$RS^2T^{-1}R^{-1}=(123456)=T_{119}$	$R=(1452)$
60	$RT^{-1}S^{-1}R^{-1}=(13)(2456)=S_{123}$	$RST^2R^{-1}=(123456)=T_{123}$	$R=(12)(3465)$
61	$RTS^{-1}R^{-1}=(12345)=S_{72}$	$RST^{-2}R^{-1}=(56)=T_{72}$	$R=(15)(24)$
64	$RSTR^{-1}=(13)(2654)=S_{125}$	$RST^2R^{-1}=(123456)=T_{125}$	$R=(12)(3465)$
65	$RST^{-1}R^{-1}=(12345)=S_{72}$	$RST^{-2}R^{-1}=(56)=T_{72}$	$R=(15432)$
68	$RT^{-1}S^{-2}R^{-1}=(1234)=S_8$	$RS^3TR^{-1}=(456)=T_8$	$R=(15436)$
69	$RTS^{-2}R^{-1}=(123456)=S_{65}$	$RS^3T^{-1}R^{-1}=(123)=T_{65}$	$R=(143562)$
72	$RS^2TR^{-1}=(1234)=S_8$	$RS^3TR^{-1}=(456)=T_8$	$R=(154)(36)$
73	$RS^2T^{-1}R^{-1}=(123456)=S_{67}$	$RS^3T^{-1}R^{-1}=(132)=T_{67}$	$R=(162354)$
76	$RST^3R^{-1}=(13524)=S_{119}$	$RT^{-2}S^{-1}R^{-1}=(123456)=T_{119}$	$R=(16342)$
77	$RST^{-3}R^{-1}=(12345)=S_{72}$	$RT^2S^{-1}R^{-1}=(56)=T_{72}$	$R=(165)(24)$
80	$RST^3R^{-1}=(14253)=S_{121}$	$RST^2R^{-1}=(123456)=T_{121}$	$R=(16325)$
81	$RST^3R^{-1}=(12345)=S_{72}$	$RST^{-2}R^{-1}=(56)=T_{72}$	$R=(165)(24)$

Théorème 4. — Toutes les bases du groupe symétrique S_6 peuvent être caractérisées par un système de cinq relations.

Démonstration. — La base S_8, T_8 est de la classe IV; la base S_{28}, T_{28} appartient à la classe I tandis que la base S_{79}, T_{79} est de la classe II et la base S_{83}, T_{83} de la classe III. Or, chacune de ces bases peut être caractérisée par cinq relations, comme nous l'avons établi dans le chapitre précédent. De plus, d'après la remarque 15, la base S_9, T_9 est caractérisée par les mêmes relations que la base S_8, T_8 . D'après le théorème 3, et la remarque 10, il existe un système de cinq relations caractéristiques pour toute base du tableau I. Comme toute base de S_6 est semblable à une base de ce tableau I et que deux bases semblables sont caractérisées par les mêmes relations, le théorème 4 est démontré.

M^{lle} S. Piccard a démontré que le groupe symétrique S_n peut être caractérisé par $n-1$ relations, quelle que soit la base S, T envisagée ($n = 3, 4, 5$)¹⁾. Nous pouvons donc affirmer que :

Théorème 5. — Toutes les bases S, T du groupe symétrique S_n peuvent être caractérisées par un système de $n-1$ relations pour $n = 3, 4, 5, 6$.

¹⁾ S. Piccard (24) et (27).

Le théorème 4 est avant tout un théorème d'existence. Pratiquement, les relations caractéristiques d'une base S, T de S_6 , déduites des relations caractéristiques d'une base S', T' de la même classe sont souvent compliquées. Parfois même, le système obtenu reflète mal les caractères de la base considérée. Pour cette raison, nous ne pouvions nous contenter de calculer les relations caractéristiques pour une seule base de chaque classe. Nous avons étudié spécialement 26 bases pour lesquelles nous avons établi un système de relations caractéristiques « original ». Ce sont les bases :

$$1, 2, 4, 8, 11, 21, 28, 35, 43, 45, 49, 57, 73, 75, 79, 83, 91, \\ 105, 107, 111, 127, 137, 144, 150, 160, 162.$$

Remarque 16. — Le système de relations caractéristiques obtenu par le calcul direct n'est pas nécessairement le plus simple. Preuve en soit le système obtenu pour la base $S_2 = (123456)$, $T_2 = (12)(364)$:

$$(31) \quad \begin{array}{ll} \text{I} & S^6 = 1 \\ \text{II} & T^6 = 1 \\ \text{III} & (TS)^2 = 1 \\ \text{IV} & T^2 S^2 T^2 S^4 T^2 S^4 = 1 \\ \text{V} & T^2 S^2 T^2 S^4 T^2 S^4 = 1 \end{array}$$

Comme nous allons le montrer, ce système peut être transformé en un autre système équivalent et plus simple. La relation (31,IV) peut se mettre sous la forme:

$$(32) \quad \begin{array}{l} T(TS)ST^2ST^3(TST)TS^4 = T(S^5T^5)ST^2ST^3(S^5)TS^4 = 1 \text{ ou} \\ \text{III} \quad \text{III} \\ TS^5T^5ST^2ST^3S^5TS^4 = 1 \end{array}$$

en tenant compte des relations I, II, III de (31). Transformons alors la relation (31,V):

$$\begin{array}{l} S^4TS^5T^2S^3T^2ST^4 = 1 \\ S(S^4TS^5T^2S^3T^2ST^4)TST = 1 \text{ d'après (31,III)} \\ S^5TS^5T(TS)S(ST)TST^5ST = 1 \\ \text{III} \quad \text{III} \\ S^5TS^5T(S^5T^5)S(T^5S^5)TST^5ST = 9 \text{ d'après (31,I,II)} \\ TST^5STS^5TS^5TS^5T^5S^5S^5 = 1 \\ (TST^5S^2)S^5TS^5TS^5TS^5T^5S^5S^5 = 1 \text{ d'après (31,I)} \\ 32 \\ (ST^2ST^3S^5T)S^5TS^5TS^5TS^5T^5S^5S^5 = 1 \text{ d'après (31,I,II)} \\ ST^2ST^3(S^5T)^5T^4S^5S^5 = 1 \\ (S^5T)^5T^4ST^5S^5 \cdot ST^2ST^3 = 1 \\ (ST)^5T^3(TSTS)T^3 = 1 \text{ d'après (31,I,II)} \\ \text{III} \\ \underline{(S^5T)^5 = 1} \text{ du fait que } T^6 = 1 \end{array}$$

Ainsi, les cinq relations caractéristiques de la base S_2, T_2 deviennent:

$$(33) \quad \begin{array}{llll} \text{I} & S^6 = 1 & \text{II} & T^6 = 1 \\ & & \text{III} & (TS)^2 = 1 \\ & & & \text{IV} & T^2 S^2 T^2 S T^4 S T^2 S^4 = 1 \\ & \text{V} & (S^5 T)^5 = 1 \end{array}$$

Remarque 17. — Il se peut que pour certaines bases, le système des relations caractéristiques obtenu par le calcul direct soit plus compliqué que le système déduit des relations caractéristiques d'une autre base de la même classe. Si ce cas est relativement rare, il se produit cependant pour la base $S_{127} = (12)(3465)$, $T_{127} = (123456)$.

Par le calcul direct, nous avons les relations caractéristiques suivantes:

$$(34) \quad \begin{array}{ll} \text{I} & S^4 = 1 \\ \text{II} & T^6 = 1 \\ \text{III} & S^2 T S T S^3 T S^2 T^5 = 1 \\ \text{IV} & S^2 T^3 S T S^3 T^4 S T^4 = 1 \\ \text{V} & S^3 T^4 S T S^3 T^3 S^2 T^4 = 1 \end{array}$$

Or, on peut déduire les relations caractéristiques de la base S_{127}, T_{127} de celles de la base $S_{35} = (1234)$, $T_{35} = (15)(2463)$ qui sont:

$$(35) \quad \begin{array}{ll} \text{I} & T^4 = 1 \\ \text{II} & T^2 S T^2 S^{-1} T^2 S^{-2} = 1 \\ \text{III} & (T^2 S^2 T S)^2 = 1 \\ \text{IV} & (T S^2)^5 = 1 \\ \text{V} & (T S)^6 = 1 \end{array}$$

On a, en effet:

$$(36) \quad \begin{array}{l} S_{128} = R T_{35} R^{-1} = (1234)(56) \\ T_{128} = R T_{35} S_{35} R^{-1} = (12)(456) \\ \text{avec } R = (16)(23). \end{array}$$

On déduit de ce système:

$$(37) \quad \begin{array}{l} S_{35} = R^{-1} S_{128}^{-1} T_{128} R \\ T_{35} = R^{-1} S_{128} R \end{array}$$

Pour avoir les relations caractéristiques de la base S_{128}, T_{128} il suffit de remplacer dans (35) S et T par leur valeur tirée de (37). On obtient:

$$(38) \quad \begin{array}{ll} \text{I} & S^4 = 1 \\ \text{II} & \frac{S^2 \cdot S^{-1} T \cdot S^2 \cdot T^{-1} S \cdot S^2 \cdot T^{-1} S T^{-1} S^{-1}}{S^2 T S^2 T^{-1} S^3 T^{-1} S T^{-1}} = 1 \quad \text{ou} \\ & \underline{S^2 T S^2 T^{-1} S^3 T^{-1} S T^{-1} = 1} \\ \text{III} & \frac{(S^2 \cdot S^{-1} T S^{-1} T \cdot S \cdot S^{-1} T)^2}{(T^2 S T S^{-1})^2} = 1 \quad \text{ou} \\ & \underline{(T^2 S T S^{-1})^2 = 1} \end{array}$$

$$(38) \quad \begin{array}{l} \text{IV} \quad \frac{(S.S^{-1}TS^{-1}T)^5 = 1 \text{ ou}}{(T^2S^{-1})^5 = 1} \\ \text{V} \quad \frac{(S.S^{-1}T)^6 = 1 \text{ ou}}{T^6 = 1} \end{array}$$

La base $S_{129} = (12)(3564)$, $T_{129} = (123456)$ est caractérisée par les relations (38) puisque les bases S_{128}, T_{128} et S_{129}, T_{129} se correspondent par un automorphisme externe du groupe S_6 . Enfin pour obtenir les relations caractéristiques de S_{127}, T_{127} , on remarquera que :

$$(39) \quad \begin{array}{l} S_{129} = S_{127}^{-1} \\ T_{129} = T_{127} \end{array}$$

Les relations caractéristiques de la base S_{127}, T_{127} sont donc :

$$(40) \quad \begin{array}{l} \text{I} \quad S^4 = 1 \\ \text{II} \quad S^2TS^2T^5ST^5S^3T^5 = 1 \\ \text{III} \quad (T^2S^3TS)^2 = 1 \\ \text{IV} \quad (T^2S)^5 = 1 \\ \text{V} \quad T^6 = 1 \end{array}$$

Ce système est plus satisfaisant que le système (34).

Nous avons établi par le calcul direct les relations caractéristiques de la base $S_{73} = (12345)$ $T_{73} = (14)(23)(56)$:

$$(41) \quad \begin{array}{l} \text{I} \quad S^5 = 1 \\ \text{II} \quad T^2 = 1 \\ \text{III} \quad (TS)^6 = 1 \\ \text{IV} \quad (S^4TST)^5 = 1 \\ \text{V} \quad [(TS^2)^2(TS)^2]^2 = 1 \end{array}$$

De ce système, nous pouvons déduire les relations caractéristiques des bases $S_{58} = (123)(45)$, $T_{58} = (12)(34)(56)$ et $S_{59} = (123456)$, $T_{59} = (12)$ qui se correspondent par un automorphisme externe du groupe S_6 . On a :

$$(42) \quad \begin{array}{l} S_{58} = RS_{73}T_{73}R^{-1} \\ T_{58} = RT_{73}R^{-1} \quad \text{avec } R = (13625). \end{array}$$

On tire de ce système :

$$(43) \quad \begin{array}{l} S_{73} = R^{-1}S_{58}T_{58}^{-1}R \\ T_{73} = R^{-1}T_{58}R \end{array}$$

Le système (41), compte tenu des relations (43) devient :

$$(44) \quad \begin{array}{l} \text{I} \quad (ST^{-1})^5 = 1 \quad \text{ou} \quad \underline{(ST)^5 = 1} \\ \text{II} \quad \underline{T^2 = 1} \\ \text{III} \quad (T.ST^{-1})^6 = 1 \quad \text{ou} \quad \underline{S^6 = 1} \end{array}$$

$$\text{IV} \quad (\text{ST}^{-1}\text{ST}^{-1}\text{ST}^{-1}\text{ST}^{-1}.\text{T}.\text{ST}^{-1}.\text{T})^3 = 1 \text{ ou}$$

$$\text{I} \\ \underline{(\text{TS}^{-1}.\text{TS})^3 = 1}$$

$$\text{V} \quad [(\text{T}.\text{ST}^{-1}\text{ST}^{-1})^2(\text{TST}^{-1})^2]^2 = 1 \text{ ou}$$

$$(\text{TST}^{-1}\text{S}^2\text{T}^{-1}\text{S}^3\text{T}^{-1})^2 = 1 \text{ ou}$$

$$\underline{(\text{TS}^{-2}\text{TS}^2)^2 = 1}$$

Or, ce système de relations caractéristiques de la base $S_{59} = (123456)$, $T_{59} = (12)$ est précisément le système de Moore pour le groupe symétrique de degré 6 (chap. II relations 28, p. 15) avec cinq relations au lieu de six. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre VI.

Remarque 18. — Pour quelques systèmes de relations caractéristiques du groupe S_6 , l'une des relations $S^m = 1$, $T^n = 1$ est une conséquence des autres relations. C'est le cas pour les relations caractéristiques de la base S_{35}, T_{35} (35). L'ordre de S n'apparaît pas explicitement, mais se déduit facilement des relations (35,I,II):

(35,II)

$$\text{T}^2\text{ST}^2\text{S}^{-1}\text{T}^2\text{S}^{-2} = 1$$

inverse:

$$\text{S}^2\text{T}^{-2}\text{ST}^{-2}\text{S}^{-1}\text{T}^{-2} = 1 \text{ ou d'après (35,I)}$$

$$\text{T}^2\text{ST}^2\text{S}^{-1}\text{T}^2\text{S}^2 = 1$$

On a donc:

$$\text{T}^2\text{ST}^2\text{S}^{-1}\text{T}^2\text{S}^{-2} = \text{T}^2\text{ST}^2\text{S}^{-1}\text{T}^2\text{S}^2$$

$$\text{S}^{-2} = \text{S}^2$$

$$\underline{\text{S}^4 = 1}$$

Comme on peut le constater dans le tableau V des bases indépendantes du groupe S_6 et de leurs relations caractéristiques, pour les bases 28, 29, 30, 31, 56, 57, 160, 161, l'ordre de T ne figure pas dans les relations caractéristiques explicitement. Dans chacun de ces cas, on trouve une relation du type:

$$(45) \quad \text{S}^{2m'} = 1 \text{ ou } \text{S}^{m'} = \text{S}^{-m'}$$

et une relation du type:

$$(46) \quad (\text{T}^{n'}\text{S}^{m'})^2\text{T}^{-n'}\text{S}^{m'} = 1$$

L'inverse de (46) est:

$$\text{S}^{-m'}\text{T}^{n'}\text{S}^{-m'}\text{T}^{-n'}\text{S}^{-m'}\text{T}^{-n'} = 1$$

ou, en tenant compte de (45):

$$(47) \quad \text{T}^{n'}\text{S}^{m'}\text{T}^{-n'}\text{S}^{m'}\text{T}^{-n'}\text{S}^{m'} = 1$$

La comparaison des relations (46) et (47) donne:

$$\text{T}^{n'}\text{S}^{m'}\text{T}^{n'}\text{S}^{m'}\text{T}^{-n'}\text{S}^{m'} = \text{T}^{-n'}\text{S}^{m'}\text{T}^{n'}\text{S}^{m'}\text{T}^{-n'}\text{S}^{m'}$$

$$\text{T}^{n'} = \text{T}^{-n'}$$

$$\underline{\text{T}^{2n'} = 1}$$

Remarque 19. — Lorsque l'ordre de S et de T n'apparaît pas explicitement dans les relations caractéristiques d'une base et lorsque la démonstration de $S^m = 1$ ou $T^n = 1$ ne s'obtient pas aussi facilement que dans les exemples de la remarque 18, il y a avantage à conserver un système de six relations caractéristiques. Il est en effet utile de connaître immédiatement l'ordre des éléments générateurs S et T.

Donnons un exemple où l'ordre de S ne se détermine pas aisément. Les relations caractéristiques de la base S_7, T_7 sont: ,

$$(48) \quad \begin{array}{ll} \text{I} & (ST)^4 = 1 \\ \text{II} & T^6 = 1 \\ \text{III} & (ST^3)^3 = 1 \\ \text{IV} & (T^4STS^2)^2 = 1 \\ \text{V} & (TS^{-1})^2T^5S^{-1}TS = 1 \end{array}$$

Partons de III:

$$\begin{aligned} T^3ST^3ST^3S &= 1 \\ T^3ST^2(TST)T(TS) &= 1 \\ &\quad \text{I} \quad \text{I} \\ T^3ST^2(S^{-1}T^{-1}S^{-1}T^{-1}S^{-1})T(S^{-1}T^{-1}S^{-1}T^{-1}S^{-1}T^{-1}) &= 1 \\ T^3ST^2S^{-1}T^{-1}S^{-1}T^{-1}(S^{-1}TS^{-1}T^{-1}S^{-1})T^{-1}S^{-1}T^{-1} &= 1 \\ &\quad \text{V} \\ T^3ST^2S^{-1}T^{-1}S^{-1}T^{-1}(T^{-1}S^{-1}T^{-1})T^{-1}S^{-1}T^{-1} &= 1 \text{ car } T^6 = T^{-1} \\ T^3ST^2S^{-1}T^{-1}S^{-1}T^{-1}(T^{-1}S^{-1})T^{-2}S^{-1}T^{-1} &= 1 \\ &\quad \text{I} \\ T^3ST^2S^{-1}T^{-1}S^{-1}T^{-1}(STSTST)T^{-2}S^{-1}T^{-1} &= 1 \\ T^3ST^2S^{-1}T^{-1}S^{-1}T^{-1}(STS)T(ST^{-1}S^{-1}T^{-1}) &= 1 \text{ V car } STS = ST^{-5}S \\ &\quad \text{V} \quad \text{V} \\ T^3ST^2S^{-1}T^{-1}S^{-1}T^{-1}(TSTS^{-1}T)T(TS^{-1}T^5S^{-1}) &= 1 \end{aligned}$$

$$(49) \quad \underline{T^3ST^2S^{-2}T^3S^{-1}T^5S^{-1} = 1}$$

Considérons I:

$$\begin{aligned} T^4STSTSTST^{-3} &= 1 \\ T^4(STS)T(STS^2)(S^{-1}T^{-3}) &= 1 \\ &\quad 49 \quad \text{IV} \quad \text{III} \\ T^4(T^3ST^2S^{-2}T^3)T(T^{-4}S^{-2}T^{-1}S^{-1}T^{-4})(T^3ST^3S) &= 1 \\ TST^2S^{-4}T^{-1}S^{-1}T^{-1}ST^3S &= 1 \text{ car } T^7 = T \text{ (II)} \\ S^{-4}T^{-1}S^{-1}T^{-1}ST^2(TSTST)T &= 1 \\ &\quad \text{I} \end{aligned}$$

$$(50) \quad \underline{S^{-4}T^{-1}S^{-1}T^{-1}ST^2(S^{-1}T^{-1}S^{-1})T = 1}$$

Enfin, la relation V devient:

$$TS^{-1}T^5S^{-1}TSTS^{-1} = 1$$

Composons le premier membre à gauche avec TS, à droite avec $S^{-1}T^{-1}$:

$$\begin{aligned}
 & (TSTS^{-1})T^5S^{-1}TSTS^{-2}T^{-1} = 1 \\
 & \quad \quad \quad \text{V} \\
 & (STST^{-1})T^5S^{-1}TSTS^{-2}T^{-1} = 1 \\
 & (STST^4S^{-1})TSTS^{-2}T^{-1} = 1 \quad (50) \quad \text{car } T^4 = T^{-2} \quad (II) \\
 & \quad \quad \quad 50 \\
 & (TS^{-4}T^{-1}S^{-1}T^{-1})TSTS^{-2}T^{-1} = 1 \\
 & \quad \quad \quad TS^{-6}T^{-1} = 1 \\
 & \quad \quad \quad \underline{S^6 = 1}
 \end{aligned}$$

En résumé, pour obtenir les relations caractéristiques des bases du groupe S_6 , il est bon de combiner les deux méthodes que nous avons exposées. Suivant les cas, on choisira tantôt le calcul direct, tel que nous l'avons pratiqué dans le chapitre IV, tantôt on utilisera les relations réversibles entre bases de la même classe. Seul le critère de simplicité et d'élégance des relations caractéristiques entre en ligne de compte pour ce choix. Par la méthode de déduction, on peut également obtenir des systèmes de relations caractéristiques très différents pour une base S,T suivant la base S',T' de la même classe utilisée comme point de départ.

Nous donnons dans le tableau V un système de cinq relations caractéristiques pour chacune des 163 bases indépendantes du groupe symétrique de degré 6. A côté de chaque base figure en chiffres romains le numéro de la classe à laquelle elle appartient. A côté de chaque système de relations caractéristiques nous avons noté la méthode utilisée pour l'obtenir: calcul direct (c) ou déduction (d) à partir d'une autre base de la même classe.

TABLEAU V

Relations caractéristiques des bases du groupe symétrique de degré 6

N°	S	T	Classe	Relations caractéristiques
1	(1234)	(1356)	I c	$S^4 = 1 \quad T^4 = 1$ $(ST)^4 = 1$ $(T^2S^2T^2S)^2 = 1$ $(T^2S)^2(TS^2)^2T^3S^3 = 1$
2	(123456)	(12)(364)	II c	$S^6 = 1 \quad T^6 = 1$ $(ST)^2 = 1$ $(S^5T)^5 = 1$ $T^2S^2T^2ST^4ST^2S^4 = 1$
3	(123456)	(12)(365)	II d	$S^6 = 1 \quad T^6 = 1$ $(ST)^2 = 1$ $(S^5T)^5 = 1$ $T^2S^4T^2ST^4ST^2S^2 = 1$

N°	S	T	Classe	Relations caractéristiques
4	(123456)	(13)(456)	I c	$S^8 = 1$ $T^6 = 1$ $(ST^5)^2 = 1$ $(ST)^4 = 1$ $T^3STST^4S^3T^5S^4 = 1$
5	(123456)	(13)(465)	I d	$S^6 = 1$ $T^6 = 1$ $(ST)^2 = 1$ $(S^5T)^4 = 1$ $T^3ST^5ST^2S^3TS^4 = 1$
6	(123456)	(14)(235)	III d	$(ST)^4 = 1$ $T^6 = 1$ $(ST^3)^3 = 1$ $(S^2TST^4)^2 = 1$ $STS^{-1}T^6(S^{-1}T)^2 = 1$
7	(123456)	(14)(236)	III d	$(ST)^4 = 1$ $T^6 = 1$ $(ST^3)^3 = 1$ $(T^4STS^2)^2 = 1$ $(TS^{-1})^2T^5S^{-1}TS = 1$
8	(1234)	(456)	IV c	$S^4 = 1$ $T^3 = 1$
9	(1234)	(152)(346)	V	$(S^3TST)^2 = 1$ $(TS^2)^4 = 1$ $(TS)^6 = 1$
10	(1234)	(125)(36)	II c	$S^4 = 1$ $T^6 = 1$
11	(1453)	(123456)	II	$(ST)^4 = 1$ $(TS^2)^2T^2S^2T^3S = 1$ $(ST^5)^2S^2T^5S^2T^3 = 1$
12	(1234)	(152)(36)	II d	$S^4 = 1$ $T^6 = 1$
13	(1435)	(123456)	II	$(ST^5)^4 = 1$ $(S^2T)^2S^3T^3S^2T^2 = 1$ $(ST)^2S^2TS^2T^3 = 1$
14	(1234)	(125)(46)	II d	$S^4 = 1$ $T^6 = 1$
15	(1534)	(123456)	II	$(ST)^4 = 1$ $(S^2T)^2ST^3S^2T^2 = 1$ $(S^3T)^2S^2TS^2T^3 = 1$
16	(1234)	(152)(46)	II d	$S^4 = 1$ $T^6 = 1$
17	(1354)	(123456)	II	$(ST^5)^4 = 1$ $(TS^2)^2T^2S^2T^3S^3 = 1$ $(TS)^2T^3S^2TS^2 = 1$
18	(1234)	(135)(46)	V d	$S^4 = 1$ $T^6 = 1$
19	(1432)	(123456)	IV	$(ST)^3 = 1$ $(S^3T)^4 = 1$ $(S^2T^2)^2 = 1$

N°	S	T	Classe	Relations caractéristiques
20	(1234)	(153)(46)	V d	$S^4 = 1 \quad T^6 = 1$
21	(1234)	(123456)	IV	$(ST)^4 = 1$ $(S^3T)^3 = 1$ $(S^2T^2)^2 = 1$
22	(1234)	(12)(356)	III d	$S^4 = 1 \quad T^6 = 1$
23	(1342)	(123456)	III	$(S^3T)^5 = 1$ $(TST^5S)^2 = 1$ $(ST^5ST^2)^2(ST^4)^2 = 1$
24	(1234)	(12)(456)	III d	$S^4 = 1 \quad T^6 = 1$
25	(1243)	(123456)	III	$(ST)^5 = 1$ $(TST^5S)^2 = 1$ $(T^2S)^2(T^4STS)^2 = 1$
26	(1234)	(13)(256)	I d	$S^4 = 1 \quad (S^2T)^4 = 1$
27	(1463)	(123456)	I	$(S^3T)^4 = 1$ $(S^2T^3)^2 = 1$ $(S^3TS^2T)^2S^3T^{-1}S^2T^2 = 1$
28	(1234)	(12)(3456)	I c	$S^4 = 1 \quad (T^2S^2)^2T^{-2}S^2 = 1$
29	(1234)	(15)(2346)	I	$(ST^3)^4 = 1$ $(S^2T)^4 = 1$ $TS^2T^2STS^3T^3ST^2S^3 = 1$
30	(1234)	(12)(3654)	I d	$S^4 = 1 \quad (T^2S^2)^2T^{-2}S^2 = 1$
31	(1234)	(15)(2643)	I	$(ST)^4 = 1$ $(S^2T)^4 = 1$ $T^3S^2T^2ST^3S^3TST^2S^3 = 1$
32	(1234)	(12)(3546)	V d	$S^4 = 1 \quad T^4 = 1$
33	(1234)	(13)(2456)	IV	$(S^2T)^3 = 1$ $(S^3T)^6 = 1$ $(S^3TST)^2 = 1$
34	(1234)	(15)(2364)	II c	$T^2ST^2S^{-1}T^2S^{-2} = 1 \quad T^4 = 1$
35	(1234)	(15)(2463)	II	$(TS)^6 = 1$ $(TS^2)^5 = 1$ $(T^2S^2TS)^2 = 1$
36	(1234)	(15)(2436)	II d	$T^2S^{-1}T^2ST^2S^2 = 1 \quad T^4 = 1$
37	(1234)	(15)(2634)	II	$(TS^3)^6 = 1$ $(TS^2)^5 = 1$ $(T^2S^2TS^3)^2 = 1$

N°	S	T	Classe	Relations caractéristiques
38	(123)(45)	(146)	III d	$S^6 = 1 \quad (S^2T)^5 = 1$
39	(123456)	(124)(365)	III	$(TS^3)^4 = 1$ $(S^4TS^2T)^2 = 1$ $(TS^4TS)^2(TS^5)^2 = 1$
40	(123)(45)	(164)	III d	$S^6 = 1 \quad (S^4T)^5 = 1$
41	(123456)	(125)(364)	III	$(TS^3)^4 = 1$ $(S^4TS^2T)^2 = 1$ $(TS^2TS^5)^2(TS^2)^2 = 1$
42	(123)(45)	(14)(26)	II c	$S^6 = 1 \quad T^2 = 1$
43	(123456)	(12)(35)	II	$(TS)^6 = 1$ $(TS^2)^5 = 1$ $(TS)^2(S^2T)^2STS^2TS^5 = 1$
44	(123)(45)	(14)(56)	I c	$S^6 = 1 \quad T^2 = 1$
45	(123456)	(12)(36)	I	$(TS)^6 = 1$ $(TS^3)^4 = 1$ $(TS)^2TS^4TS^2TS^5TSTS^2 = 1$
46	(123)(45)	(14)(36)	II d	$S^6 = 1 \quad T^2 = 1$
47	(123456)	(12)(46)	II	$(TS)^6 = 1$ $(TS^2)^5 = 1$ $(TS^4TS^5)^2S^2TS^5TS^3 = 1$
48	(123)(45)	(12)(346)	II c	$S^6 = 1 \quad T^6 = 1$
49	(156324)	(123456)	II	$(T^3S)^2 = 1$ $S^3TSTS^4T^5ST^2 = 1$ $S^3T^2STST^5S^4T^5 = 1$
50	(123)(45)	(12)(364)	II d	$S^6 = 1 \quad T^6 = 1$
51	(132564)	(123456)	II	$(T^3S)^2 = 1$ $S^3T^5ST^5S^4TST^2 = 1$ $S^3T^4ST^5STS^4T = 1$
52	(123)(45)	(14)(236)	V d	$(T^4S)^2 = 1 \quad T^6 = 1$
53	(135624)	(123456)	IV	$(T^2S^2)^2 = 1$ $(ST^5)^5 = 1$ $(T^3ST^5S)^3 = 1$
54	(123)(45)	(14)(263)	V d	$(T^2S)^2 = 1 \quad T^6 = 1$
55	(142653)	(123456)	IV	$(T^4S^2)^2 = 1$ $(ST)^5 = 1$ $(T^3STS)^3 = 1$

N°	S	T	Classe	Relations caractéristiques
56	(123)(45)	(14)(256)	III c	$S^6 = 1 \quad (S^3T^3)^2S^3T^{-3} = 1$
57	(145623)	(123456)	III	$(T^5S)^3 = 1$ $S^2TST^4S^5T^5 = 1$ $S^5T^2STS^3T^2 = 1$
58	(123)(45)	(12)(34)(56)	V d	$S^6 = 1 \quad T^2 = 1$
59	(123456)	(12)	IV	$(TS)^5 = 1$ $(S^5TST)^3 = 1$ $(S^4TS^2T)^2 = 1$
60	(123)(45)	(124)(356)	III d	$S^6 = 1 \quad T^3 = 1$
61	(123456)	(142)	III	$(S^2T)^5 = 1$ $(S^3TS^2T^2)^2 = 1$ $T^2STST^2S^4T^2S^2 = 1$
62	(123)(45)	(142)(365)	III d	$S^6 = 1 \quad T^3 = 1$
63	(123456)	(124)	III	$(S^4T)^5 = 1$ $(S^3T^2S^2T)^2 = 1$ $TST^2STS^4TS^2 = 1$
64	(123)(45)	(145)(236)	V d	$S^6 = 1 \quad T^3 = 1$
65	(123456)	(123)	IV	$(ST^2)^4 = 1$ $(S^2T^2)^4 = 1$ $(S^5TST)^2 = 1$
66	(123)(45)	(154)(263)	V d	$S^6 = 1 \quad T^3 = 1$
67	(123456)	(132)	IV	$(ST)^4 = 1$ $(S^2T)^4 = 1$ $(S^5TST)^2 = 1$
68	(123)(45)	(134)(256)	III d	$S^6 = 1 \quad T^3 = 1$
69	(123456)	(125)		$(S^4T)^5 = 1$ $(S^3TS^4T^2)^2 = 1$ $TST^2STS^2TS^4 = 1$
70	(123)(45)	(143)(265)	III d	$S^6 = 1 \quad T^3 = 1$
71	(123456)	(152)		$(S^2T)^5 = 1$ $(S^3T^2S^4T)^2 = 1$ $T^2STST^2S^2T^2S^4 = 1$
72	(12345)	(56)	IV c	$S^5 = 1 \quad T^2 = 1$
73	(12345)	(14)(23)(56)	V	$(ST)^6 = 1$ $(S^4TST)^3 = 1$ $[(TS^2)^2(TS)^2]^2 = 1$

N°	S	T	Classe	Relations caractéristiques
74	(12345)	(1263)	III c	$S^5 = 1 \quad T^4 = 1$
75	(12345)	(1326)	III	$(S^2T^2)^4 = 1$ $(S^3TST^2)^2 = 1$ $T^2S^4TST^3S^4T^2S = 1$
76	(12345)	(1362)	III d	$S^5 = 1 \quad T^4 = 1$
77	(12345)	(1623)	III	$(S^2T^2)^4 = 1$ $(S^3T^3ST^2)^2 = 1$ $T^2S^4T^3STS^4T^2S = 1$
78	(12345)	(1346)	II c	$S^5 = 1 \quad T^4 = 1$
79	(12345)	(1436)	II	$(T^2S^2TS)^2 = 1$ $(TS)^2T^3ST^3S^3 = 1$ $T^2S^4TST^3S^3T^2S^2 = 1$
80	(12345)	(1643)	II d	$S^5 = 1 \quad T^4 = 1$
81	(12345)	(1634)	II	$(T^2S^2T^3S)^2 = 1$ $(T^3S)^2TSTS^3 = 1$ $T^2S^4T^3STS^4T^2S^2 = 1$
82	(12345)	(123)(46)	III c	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
83	(12354)	(123456)	III	$(S^4T)^4 = 1$ $(S^3T^2)^2 = 1$ $(TS)^2(T^2S^2)^2 = 1$
84	(12345)	(132)(46)	III d	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
85	(12543)	(123456)		$(ST)^4 = 1$ $(S^2T^2)^2 = 1$ $(T^5S)^2(T^3S^2)^2 = 1$
86	(12345)	(123)(56)	III d	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
87	(13452)	(123456)	III	$(S^4T)^4 = 1$ $(S^3T^2)^2 = 1$ $(S^2T^3)^2(ST)^2 = 1$
88	(12345)	(132)(56)	III d	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
89	(14532)	(123456)	III	$(ST)^4 = 1$ $(S^2T^2)^2 = 1$ $(TS^4)^2(T^3S^3)^2 = 1$
90	(12345)	(124)(36)	II c	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
91	(15243)	(123456)	II	$(S^3T)^4 = 1$ $(ST^2)^2 = 1$ $(TS^2)^2(T^3S^4)^2 = 1$

N°	S	T	Classe	Relations caractéristiques
92	(12345)	(142)(36)	II d	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
93	(14235)	(123456)	II	$(S^2T)^4 = 1$ $(ST^4)^2 = 1$ $(ST^3)^2(S^3T)^2 = 1$
94	(12345)	(124)(56)	II d	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
95	(15324)	(123456)	II	$(S^3T)^4 = 1$ $(ST^2)^2 = 1$ $(S^4T^3)^2(S^2T)^2 = 1$
96	(12345)	(142)(56)	II d	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
97	(13425)	(123456)	II	$(S^2T)^4 = 1$ $(ST^4)^2 = 1$ $(TS^2)^2(T^3S)^2 = 1$
98	(12345)	(126)(34)	II d	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
99	(14523)	(123456)	II	$(S^2T^2)^3 = 1$ $(S^2TST)^2 = 1$ $(T^3S^3)^2(TS)^2 = 1$
100	(12345)	(162)(34)	II d	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
101	(14352)	(123456)	II	$(S^3T^2)^3 = 1$ $(S^3TS^4T)^2 = 1$ $(S^4T)^2(S^2T^3)^2 = 1$
102	(12345)	(126)(35)	V d	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
103	(15432)	(123456)	IV	$(ST)^2 = 1$ $(S^2T^2)^3 = 1$ $(T^3ST^5S)^2 = 1$
104	(12345)	(162)(35)	V c	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
105	(12345)	(123456)	IV	$(S^4T)^2 = 1$ $(S^3T^2)^3 = 1$ $(T^3STS)^2 = 1$
106	(12345)	(126)(45)	II c	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
107	(12534)	(123456)	II	$(S^2T^2)^3 = 1$ $(S^2TST)^2 = 1$ $(ST)^2(S^3T^3)^2 = 1$
108	(12345)	(162)(45)	II d	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
109	(13254)	(123456)	II	$(S^2T^4)^3 = 1$ $(S^4TS^3T)^2 = 1$ $(ST^5)^2(S^3T^3)^2 = 1$

N°	S	T	Classe	Relations caractéristiques
110	(12345)	(136)(24)	III c	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
111	(13245)	(123456)	III	$(ST^4)^3 = 1$ $(S^2T^4ST)^2 = 1$ $S^4TSTS^3T^4 = 1$
112	(12345)	(163)(24)	III d	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
113	(15342)	(123456)	III	$(ST^2)^3 = 1$ $(S^2T^2ST^5)^2 = 1$ $T^4S^2TS^4TS = 1$
114	(12345)	(136)(25)	III d	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
115	(12435)	(123456)	III	$(ST^4)^3 = 1$ $(ST^4S^2T)^2 = 1$ $TSTS^4T^4S^3 = 1$
116	(12345)	(163)(25)	III d	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
117	(15423)	(123456)	III	$(ST^2)^3 = 1$ $(S^3T^4S^4T)^2 = 1$ $STS^4TS^2T^4 = 1$
118	(12345)	(136)(45)	V d	$S^5 = 1 \quad (ST)^6 = 1$
119	(13524)	(123456)	IV	$(S^2T)^2 = 1$ $(S^3TST)^3 = 1$ $(T^3STS)^2 = 1$
120	(12345)	(163)(45)	V d	$S^5 = 1 \quad (S^4T)^6 = 1$
121	(14253)	(123456)	IV	$(S^3T)^3 = 1$ $(S^2TS^4T)^3 = 1$ $(T^3S^4TS^4)^3 = 1$
122	(1234)(56)	(12)(345)	V d	$S^4 = 1 \quad T^6 = 1$
123	(13)(2456)	(123456)	IV	$(S^3T)^4 = 1$ $(S^3T^2)^3 = 1$ $(ST^5ST)^2 = 1$
124	(1234)(56)	(12)(354)	V d	$S^4 = 1 \quad T^6 = 1$
125	(13)(2654)	(123456)	IV	$(ST)^4 = 1$ $(ST^2)^3 = 1$ $(ST^5ST)^2 = 1$
126	(1234)(56)	(12)(356)	II d	$S^4 = 1 \quad T^6 = 1$
127	(12)(3465)	(123456)	II	$(T^2S)^5 = 1$ $(T^2S^3TS)^2 = 1$ $S^2TS^2T^5ST^5S^3T^5 = 1$

N°	S	T	Classe	Relations caractéristiques
128	(1234)(56)	(12)(456)	II d	$S^4 = 1 \quad T^6 = 1$
129	(12)(3564)	(123456)	II	$(T^4S)^5 = 1$ $(T^2STS^3)^2 = 1$ $S^2TS^2T^5S^3T^5ST^5 = 1$
130	(1234)(56)	(13)(256)	V d	$(T^3S)^2 = 1 \quad T^6 = 1$
131	(14)(2536)	(123456)	IV	$(T^4S)^5 = 1$ $(T^5STS)^2 = 1$ $(T^2ST^4S)^3 = 1$
132	(1234)(56)	(15)(234)	I d	$S^4 = 1 \quad T^6 = 1$
133	(12)(3645)	(123456)	I	$(TS)^6 = 1$ $(T^2S)^2 = 1$ $(TS)^2T^4S^2TS^3T^5S^2 = 1$
134	(1234)(56)	(15)(243)	I d	$S^4 = 1 \quad T^6 = 1$
135	(12)(3546)	(123456)	I	$(T^5S)^6 = 1$ $(T^4S)^2 = 1$ $(ST^5)^2S^2TS^3T^5S^2T^2 = 1$
136	(1234)(56)	(15)(236)	III c	$S^4 = 1 \quad T^6 = 1$
137	(13)(2546)	(123456)	III	$(T^4S)^3 = 1$ $(T^3STS^2)^2 = 1$ $S^3TST^2S^2T = 1$
138	(1234)(56)	(15)(263)	III d	$S^4 = 1 \quad T^6 = 1$
139	(13)(2564)	(123456)	III	$(T^2S)^3 = 1$ $(T^3ST^5S^2)^2 = 1$ $S^3TSTS^2T^2 = 1$
140	(1234)(56)	(15)(346)	III d	$S^4 = 1 \quad T^6 = 1$
141	(13)(2465)	(123456)	III	$(T^4S)^3 = 1$ $(T^3S^2TS^2) = 1$ $S^3TS^2T^2ST = 1$
142	(1234)(56)	(15)(364)	III d	$S^4 = 1 \quad T^6 = 1$
143	(13)(2645)	(123456)	III	$(T^2S)^3 = 1$ $(T^3S^3TS^2)^2 = 1$ $S^3T^2S^2TST = 1$
144	(123456)	(12)(345)	III c	$S^6 = 1 \quad T^6 = 1$
154	(13)(265)	(123456)	III	$(TS^5)^3 = 1$ $T^2S^2TS^2T^4S = 1$ $S^4T^2ST^3S^2T^2 = 1$

N°	S	T	Classe	Relations caractéristiques
146	(123456)	(12)(354)	III d	$S^6 = 1 \quad T^6 = 1$
147	(13)(245)	(123456)	III	$(TS)^3 = 1$ $T^4S^2T^5S^2T^2S = 1$ $S^4T^4ST^3S^2T^4 = 1$
148	(123456)	(12)(346)	II d	$S^6 = 1 \quad T^6 = 1$
149	(12)(356)	(123456)	II	$(TS)^5 = 1$ $(T^5S)^2 = 1$ $T^4S^2T^4ST^2ST^4S^4 = 1$
150	(123456)	(12)(456)	III c	$S^6 = 1 \quad T^6 = 1$
151	(13)(254)	(123456)	III	$(T^3STS)^2 = 1$ $T^4S^2TS^2T^2S = 1$ $S^4T^2S^2T^3ST^2 = 1$
152	(123456)	(12)(465)	III d	$S^6 = 1 \quad T^6 = 1$
153	(13)(256)	(123456)	III	$(T^3ST^5S)^2 = 1$ $T^2S^2T^5S^2T^4S = 1$ $S^4T^4S^2T^3ST^4 = 1$
154	(123456)	(14)(253)	III d	$(T^5S)^4 = 1 \quad T^6 = 1$
155	(14)(263)	(123456)	III	$(T^3S)^3 = 1$ $(S^2T^5ST^2)^2 = 1$ $(TS)^2T^5STS^{-1} = 1$
156	(123456)	(134562)	IV d	$(T^3S)^4 = 1 \quad T^6 = 1$
157	(123)(45)	(16)(243)	V	$(T^5S)^3 = 1$ $(T^4S)^4 = 1$ $(T^4ST^2S)^2 = 1$
158	(123456)	(126543)	IV d	$(T^3S)^4 = 1 \quad T^6 = 1$
159	(123)(45)	(16)(234)	V	$(ST)^3 = 1$ $(T^2S)^4 = 1$ $(T^4ST^2S)^2 = 1$
160	(123456)	(132654)	III c	$S^6 = 1 \quad (T^3S^3)^2T^{-3}S^{-3} = 1$
161	(123)(45)	(14)(356)	III	$(TS)^3 = 1$ $T^3S^2TS^2T^5S = 1$ $S^3T^2ST^2S^5T = 1$
162	(123456)	(143265)	III c	$S^6 = 1 \quad T^6 = 1$
163	(123)(45)	(14)(265)	III	$(TS)^3 = 1$ $T^5S^2TS^2T^3S = 1$ $S^5T^2ST^2S^3T = 1$

VI. INDÉPENDANCE DES RELATIONS CARACTÉRISTIQUES

Définition 10. — Soit S, T une base du groupe $\mathbf{S}_n$, caractérisée par m relations (1) $f_i(S, T) = 1$ ($i=1, 2, \dots, m$). On dit que les m relations caractéristiques sont indépendantes si aucune d'elles n'est une conséquence des autres.

Considérons les m relations caractéristiques d'une base S, T de $\mathbf{S}_n$:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & f_1(S, T) = 1 \\
 & f_2(S, T) = 1 \\
 & f_3(S, T) = 1 \\
 & \dots\dots\dots \\
 & f_{i-1}(S, T) = 1 \\
 & f_i(S, T) = 1 \\
 & f_{i+1}(S, T) = 1 \\
 & \dots\dots\dots \\
 & f_m(S, T) = 1
 \end{aligned}$$

Supposons que la relation (2) $f_i(S, T) = 1$ soit indépendante des autres. Si, contrairement à l'hypothèse, la relation (2) était une conséquence des autres relations du système (1), tout couple de substitutions S', T' qui satisferait au système:

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & f_1(S', T') = 1 \\
 & f_2(S', T') = 1 \\
 & \dots\dots\dots \\
 & f_{i-1}(S', T') = 1 \\
 & f_{i+1}(S', T') = 1 \\
 & \dots\dots\dots \\
 & f_m(S', T') = 1
 \end{aligned}$$

devrait satisfaire à la relation:

$$(4) \quad f_i(S', T') = 1$$

Pour prouver l'indépendance de (2), il suffit donc de trouver un couple de substitutions S', T' qui satisfassent aux relations (3) sans satisfaire à la relation (4).

M. Dubreil ¹⁾ donne comme relations fondamentales du groupe symétrique S_3 les relations:

$$\begin{aligned} (5) \quad & S^3 = 1 \\ (6) \quad & T^2 = 1 \\ (7) \quad & STS = T \end{aligned}$$

Ces 3 relations sont indépendantes. En effet, les substitutions $S = (12)$, $T = (34)$ satisfont aux relations (6) et (7) sans satisfaire à la relation (5), ce qui prouve l'indépendance de (5). D'autre part, les substitutions $S = (123)$, $T = (12)(456)$ satisfont aux relations (5) et (7) sans satisfaire à la relation (6), d'où l'indépendance de (6). Enfin, les substitutions $S = (123)$, $T = (45)$ satisfont les relations (5) et (6) sans satisfaire à (7) car:

$$STS = (132)(45) \neq T = (45)$$

ce qui prouve l'indépendance de (7).

Pourtant, cette indépendance des 3 relations caractéristiques du groupe S_3 ne signifie pas qu'il s'agisse d'un système minimum. Il existe, en effet, un système de deux relations caractéristiques qui suffisent à définir ce groupe ²⁾:

$$\begin{aligned} (8) \quad & T^2 = 1 \\ (9) \quad & TSTS^{-2} = 1 \end{aligned}$$

Ces relations sont indépendantes. ³⁾ Les substitutions $S = (123)$, $T = (132)$ démontrent l'indépendance de (8), alors que les substitutions $S = (12)$, $T = (34)$ prouvent l'indépendance de (9).

De (9), on déduit par composition à droite avec S^2

$$(10) \quad TST = S^2$$

En composant à gauche et à droite avec T^{-1} qui est égal à T d'après (8), on a:

$$\begin{aligned} (11) \quad & S = TS^2T \\ (12) \quad & S.S = TS^2T.TS^2T = TS^2T^2S^2T \quad \text{et d'après (8):} \\ & S^2 = TS^4T \end{aligned}$$

Remplaçons S^2 par sa valeur tirée de (10):

$$TST = TS^4T \quad \text{ou} \quad S^3 = 1$$

Ainsi, M. Dubreil ne donne pas pour le groupe S_3 un système minimum de relations caractéristiques. Moore, d'ailleurs, fournit également 3 relations

¹⁾ Dubreil (3) p. 113 N° 3.

²⁾ S. Piccard (24) p. 89 et (27).

³⁾ Démontré en 1946 par M¹¹⁶ S. Piccard.

caractéristiques indépendantes pour ce groupe ¹⁾, la relation (7) étant écrite sous la forme:

$$(13) \quad (ST)^2 = 1$$

Ce système est cité sous la même forme par Burnside ²⁾. Miller ³⁾ caractérise ce groupe par les relations indépendantes suivantes:

$$(14) \quad S^2 = 1$$

$$(15) \quad T^2 = 1$$

$$(16) \quad (ST)^3 = 1$$

L'indépendance de (14) découle de $S = (1234)$, $T = (12)$

L'indépendance de (15) découle de $S = (12)$, $T = (1234)$

L'indépendance de (16) découle de $S = (12)$, $T = (34)$.

Dans ce cas aussi, il existe un système de deux relations caractéristiques indépendantes ⁴⁾:

$$(17) \quad T^2 = 1$$

$$(18) \quad TS(TS^{-1})^2 = 1$$

On démontre que $S^2 = 1$ par un procédé analogue à celui décrit dans la remarque 18.

Il semble que les différents auteurs qui se sont occupés de cette question aient tous tenu à conserver dans chaque système de relations caractéristiques les relations donnant l'ordre des éléments fondamentaux. Cette idée de conserver les relations $S^m = 1$, $T^n = 1$ prend même une telle importance chez Burnside, qu'il néglige de démontrer l'indépendance de ces deux relations. On trouve, en effet, dans un de ses mémoires ⁵⁾ le système suivant qui caractérise S_5 :

$$(19) \quad S^2 = 1$$

$$(20) \quad (T^{-1}STS)^3 = 1$$

$$(21) \quad (ST)^4 = 1$$

$$(22) \quad T^5 = 1$$

Burnside affirme: « Il reste à montrer que ces relations sont indépendantes. Si elles ne le sont pas, soit la seconde, soit la troisième des équations est superflue. Ce ne peut être la seconde, car les relations:

$$S^2 = 1 \quad T^5 = 1 \quad (ST)^4 = 1$$

n'engendrent pas un groupe d'ordre fini ⁶⁾. A nouveau, les relations:

$$S^2 = 1 \quad T^5 = 1 \quad (T^{-1}STS)^3 = 1$$

¹⁾ Moore (20) p. 364.

²⁾ Burnside (10) p. 119.

³⁾ Miller (19) p. 368.

⁴⁾ S. Piccard (24) et 27.

⁵⁾ Burnside (10) p. 125, ligne 22.

⁶⁾ Burnside renvoie à l'étude de van Dyck (13) N° 15.

ne définissent certainement pas un groupe simplement isomorphe avec le groupe symétrique de cinq symboles, car les substitutions ¹⁾:

$$S = (13)(25) \quad T = (12345)$$

satisfont à ces relations et engendrent le groupe alterné de cinq symboles.

Par suite, finalement, les relations (19 à 22) sont *nécessaires* ²⁾ et suffisantes pour définir le groupe symétrique de 5 symboles. »

De même, dans son traité ³⁾, Burnside déclare :

“ Moreover though no one of the generating operations can be expressed in terms of the remainder, there must be relations of the general form :

$$S_m^a S_n^b \dots S_p^c = E$$

among them, as otherwise the group would be of infinite order; and the number of these relations, which are independent of one another, must be finite. Among them there necessarily occur the relations :

$$S_1^{a_1} = E \quad S_2^{a_2} = E \quad \dots S_n^{a_n} = E$$

giving the orders of the fundamental operations. ”

Théorème 6. — Il existe pour le groupe symétrique de degré 6 au moins un système de 5 relations caractéristiques indépendantes.

Démonstration. — Les relations caractéristiques de la base $S_8 = (1234)$, $T_8 = (456)$ sont :

(23)	I	$S^4 = 1$
	II	$T^3 = 1$
	III	$(S^3 T S T)^2 = 1$
	IV	$(T S^2)^4 = 1$
	V	$(T S)^6 = 1$

Considérons les substitutions $S = (1234)(789)$ $T = (456)(789)$. On a :

(24)	$S^3 T S T = (35)(46)$
(25)	$T S^2 = (13)(2564)$
(26)	$T S = (123564)(798)$

Toutes les relations (23) sont satisfaites sauf (I), ce qui prouve l'indépendance de (I).

Considérons maintenant $S = (1234)$, $T = (456)(78)$:

(27)	$S^3 T S T = (35)(46)$
(28)	$T S^2 = (13)(2564)(78)$
(29)	$T S = (123564)(78)$

¹⁾ Nous changeons les notations pour les rendre conformes à celles utilisées tout au long du présent travail.

²⁾ C'est nous qui soulignons.

³⁾ Burnside (2) p. 20-21, paragraphe 16, ligne 23.

Toutes les relations (23) sont satisfaites sauf (II), ce qui prouve l'indépendance de (II).

Envisageons les substitutions $S = (1234)(7,8,9,10)$ $T = (456)(7,9,11)$.
On a :

$$\begin{array}{ll} (30) & S^3TST = (35)(46)(7,9,10,8,11) \\ (31) & TS^2 = (13)(2564)(7,11)(8,10) \\ (32) & TS = (123564)(7,8,11)(9,10) \end{array}$$

Comme les relations (23) sont satisfaites à l'exception de (III) l'indépendance de (III) est démontrée.

Les substitutions $S = (1234)(78)$ $T = (456)(789)$ prouvent l'indépendance de (IV), car :

$$\begin{array}{ll} (33) & S^3TST = (35)(46) \\ (34) & TS^2 = (13)(2564)(789) \\ (35) & TS = (123564)(79) \end{array}$$

Enfin, on démontre l'indépendance de (V) à l'aide des substitutions $S = (1234)(7,8,9,10)$ $T = (456)$:

$$\begin{array}{ll} (36) & S^3TST = (35)(46) \\ (37) & TS^2 = (13)(2564)(79)(8,10) \\ (38) & TS = (123564)(7,8,9,10) \end{array}$$

c.q.f.d.

Corollaire 1. — Toutes les bases du groupe S_6 appartenant à la classe IV peuvent être caractérisées par un système de cinq relations indépendantes.

Comme S_8, T_8 appartient à la classe IV, on peut déduire des relations (23) un système de cinq relations caractéristiques indépendantes pour n'importe quelle base de cette classe.

Corollaire 2. — Toutes les bases du groupe S_6 appartenant à la classe V peuvent être caractérisées par un système de cinq relations indépendantes.

En effet, par les automorphismes externes du groupe S_6 , nous savons que le système (23) caractérise non seulement la base S_8, T_8 mais aussi la base S_9, T_9 de la classe V.

Le système des relations caractéristiques de Moore pour le groupe S_n est surabondant. Les relations ne sont pas indépendantes, puisque certaines d'entre elles sont superflues.

Théorème 7. — Dans le système donné par Moore pour caractériser le groupe symétrique de degré n :

$$\begin{array}{ll} (1) & S^n = 1 \\ (2) & T^2 = 1 \\ (3) & (ST)^{n-1} = 1 \end{array}$$

$$(4) \quad (S^{-1}TST)^3 = 1$$

$$(5) \quad (S^{-k}TST^k)^2 = 1 \quad k = 2, 3, \dots, n-2$$

la relation (4) est une conséquence des autres relations du système.

Ce théorème a été établi par M^{lle} S. Piccard en 1946 et communiqué à la Société Mathématique Suisse en 1953 ¹⁾.

Indépendamment de M^{lle} S. Piccard, nous avons établi une démonstration de ce théorème qui repose sur deux lemmes:

Lemme 1. — Quels que soient les éléments S et T satisfaisant au système de Moore, on a:

$$(a) \quad (S^{-1}T)^{n-k-3}S^{-k-1}TS^{k+1}(TS)^{n-k-3} = (S^{-1}T)^{n-k-2}S^{-k}TS^k(TS)^{n-k-2}$$

$$k = 2, 3, \dots, n-2$$

Démonstration:

La relation (a) est une conséquence des relations (2) et (5) pour $k = 2, 3, \dots, n-2$. En effet,

$$\begin{aligned} (S^{-1}T)^{n-k-3}S^{-k-1}TS^{k+1}(TS)^{n-k-3} &= (S^{-1}T)^{n-k-2}T^{-1}S \cdot S^{-k-1}TS^{k+1} \cdot \\ \cdot S^{-1}T^{-1}(TS)^{n-k-2} &= (S^{-1}T)^{n-k-2}(T^{-1}S^{-k}TS^kT^{-1})(TS)^{n-k-2} = \\ &\quad (2) \\ &= (S^{-1}T)^{n-k-2}(T^{-1}S^{-k}T^{-1}SkT^{-1})(TS)^{n-k-2} = \\ &\quad (5) \\ &= (S^{-1}T)^{n-k-2}S^{-k}TS^k(TS)^{n-k-2} \end{aligned}$$

c.q.f.d.

Lemme 2. — Quels que soient les éléments S et T satisfaisant au système de Moore, on a:

$$(b) \quad S^2TS^{-2} = (S^{-1}T)^{n-4}S^{-2}TS^2(TS)^{n-4}$$

Démonstration:

Appliquons l'égalité (a) du lemme 1 successivement pour $k = n-3, n-4, \dots, 3, 2$.

$$\begin{aligned} S^2TS^{-2} &= S^{-n} \cdot S^2TS^{-2} \cdot S^n = S^{-n+2}TS^{n-2} = (S^{-1}T)^0S^{-n+2}TS^{n-2}(TS)^0 = \\ &\quad (1) \quad (1) \quad (a) \text{ pour } k=n-3 \\ &= (S^{-1}T)^1S^{-n+3}TS^{n-3}(TS)^1 = (S^{-1}T)^2S^{-n+4}TS^{n-4}(TS)^2 = \dots \\ &\quad (a) \text{ pour } k=n-4 \quad (a) \text{ pour } k=n-5 \\ &\dots = (S^{-1}T)^{n-5}S^{-3}TS^3(TS)^{n-5} = (S^{-1}T)^{n-4}S^{-2}TS^2(TS)^{n-4} \\ &\quad (3) \text{ pour } k=2 \end{aligned}$$

c.q.f.d.

¹⁾ S. Piccard (25) et (27).

Démonstration du théorème 7.

Partons de la relation (5) pour $k = 2$:

$$(S^{-2}TS^2T)^2 = 1$$

$$S^{-2}T(S^2TS^{-2})TS^2T = 1$$

(b)

$$S^{-2}T(S^{-1}T)^{n-4}S^{-2}TS^2(TS)^{n-4}TS^2T = 1$$

$$S^{-1}(S^{-1}T)^{n-3}S^{-2}TS^2(TS)^{n-4}TS^2T = 1$$

(3)

$$S^{-1}(TS)^2S^{-2}TS^2T(ST)^{n-4}S^2T = 1 \text{ d'après (1) et (2)}$$

(3)

$$S^{-1}(TS)^2S^{-2}TS^2T(TS^{-1})^3S^2T = 1 \text{ d'après (1) et (2)}$$

$$S^{-1}TSTS^{-1}TS^2T^2S^{-1}TS^{-1}TST = 1$$

(2)

$$\underline{(S^{-1}TST)^3 = 1}$$

c.q.f.d.

Remarque 20. — Les relations (5) pour $k > \frac{n}{2}$ sont une conséquence des relations (1) et (5) pour $k \leq \frac{n}{2}$.

De ce fait le système de Moore, compte tenu du théorème 7, devient:

$$(1) \quad S^n = 1$$

$$(2) \quad T^2 = 1$$

$$(3) \quad (ST)^{n-1} = 1$$

$$(5)' \quad (S^{-k}TS^kT)^2 = 1 \quad k = 2, 3, \dots, \frac{n}{2} \text{ ou } \frac{n-1}{2}$$

suivant que n est pair ou impair.

Corollaire 3. — D'après la remarque 20, on a pour $n = 5$ un système de 4 relations caractéristiques:

$$S^5 = 1$$

$$T^2 = 1$$

$$(ST)^4 = 1$$

$$(S^{-2}TS^2T)^2 = 1$$

C'est le système établi directement par M^{lle} S. Piccard dans son travail ¹⁾ sur les relations caractéristiques des bases du groupe S_5 pour la base 17.

Théorème 8. — Le système:

$$(1) \quad S^n = 1$$

$$(2) \quad T^2 = 1$$

$$(3) \quad (ST)^{n-1} = 1$$

$$(5)' \quad (S^{-k}TS^kT)^2 = 1 \quad k = 2, 3, \dots, \frac{n}{2} \text{ ou } \frac{n-1}{2}$$

¹⁾ S. Piccard (24) p. 90-91, ligne 17.

est équivalent au système:

- (1) $S^n = 1$
- (2) $T^2 = 1$
- (3) $(ST)^{n-1} = 1$
- (4) $(S^{-1}TST)^3 = 1$
- (5)'' $(S^{-k}TS^kT)^2 = 1$ pour $k = 2, \dots, i-1, i+1, \dots, \frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$
 $i \geq 3$

Autrement dit, on peut remplacer dans le système de la remarque 20 la relation $(S^{-1}TS^1T)^2 = 1$ par la relation $(S^{-1}TST)^3 = 1$.

Démonstration: D'après le théorème 7, du système des relations (1),(2), (3),(5)' on peut déduire le système des relations (1),(2),(3),(4),(5)''. Il reste à prouver que l'on peut inversement déduire le système (1),(2),(3),(5)' des relations (1),(2),(3),(4) et (5)''.
 Démontrons d'abord que la relation:

$$(b) \quad S^2TS^{-2} = (S^{-1}T)^{n-4}S^{-2}TS^2(TS)^{n-4}$$

est une conséquence des relations (1),(2),(3),(4) et (5)'' pour $k=2$. En effet, d'après (5)'' pour $k=2$:

$$(c) \quad \begin{aligned} (S^{-2}TS^2T)^2 &= 1 \quad \text{ou} \\ S^2TS^{-2} &= TS^2TS^{-2}T \quad \text{d'après (2)} \end{aligned}$$

D'autre part:

$$(4) \quad \begin{aligned} (S^{-1}TST)^3 &= 1 \\ S^{-1}TSTS \cdot S^{-2}TS^2T \cdot TS^{-1}TS^{-1}TS^{-1} \cdot S^2T &= 1 \\ (2) \\ S^{-1}(TS)^2S^{-2}TS^2T(TS^{-1})^3S^2T &= 1 \\ (3) \quad (3) \\ S^{-1}(S^{-1}T)^{n-3}S^{-2}TS^2T(ST)^{n-4}S^2T &= 1 \quad \text{d'après (2)} \\ (d) \quad TS^2TS^{-2}T(S^{-1}T)^{n-4}S^{-2}TS^2(TS)^{n-4} &= 1 \end{aligned}$$

En comparant (c) et (d), on obtient:

$$(b) \quad S^2TS^{-2} = (S^{-1}T)^{n-4}S^{-2}TS^2(TS)^{n-4}$$

Le lemme 1 est valable dans le système (1)(2)(3)(4)(5)'' pour les valeurs $k = 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n-2$. On peut donc l'utiliser pour toute valeur de k différente de i . En appliquant ce lemme 1 successivement pour $k = n-3, n-4, \dots, i+1$, comme nous l'avons fait pour la démonstration du lemme 2, nous obtenons:

$$(e) \quad S^2TS^{-2} = (S^{-1}T)^{n-i-3}S^{-i-1}TS^{i+1}(TS)^{n-i-3}$$

En appliquant ce lemme pour $k = 2, 3, \dots, i-1$, nous avons:

$$(f) \quad (S^{-1}T)^{n-4}S^{-2}TS^2(TS)^{n-4} = (S^{-1}T)^{n-i-2}S^{-i}TS^i(TS)^{n-i-2}$$

En comparant les relations (b), (e) et (f), on déduit:

$$(S^{-1}T)^{n-i-3}S^{-i-1}TS^{i+1}(TS)^{n-i-3} = (S^{-1}T)^{n-i-2}S^{-i}TS^i(TS)^{n-i-2}$$

Composons à gauche avec $S(S^{-1}T)^{-n+i+3}$ et à droite avec

$(TS)^{-n+i+3}S^{-1}$ chacune des expressions de l'égalité ci-dessus:

$$S.S^{-i-1}TS^{i+1}.S^{-1} = S.S^{-1}T.S^{-i}TS^i.TS.S^{-1}$$

$$S^{-i}TS^i = TS^{-i}TS^iT \quad \text{et d'après (2)}$$

$$\underline{(S^{-i}TS^iT)^2 = 1}$$

c.q.f.d.

Corollaire 4. — D'après le théorème 8, on a pour $n = 6$ et $i = 3$ les relations caractéristiques suivantes pour le groupe S_6 :

$$S^6 = 1$$

$$T^2 = 1$$

$$(ST)^5 = 1$$

$$(S^{-1}TST)^3 = 1$$

$$(S^{-2}TS^2T)^2 = 1$$

Or, ce système est précisément celui dont nous avons fait mention dans le chapitre précédent (chap. V, relations 44).

En résumé, le système de Moore est surabondant. Dans le système:

$$(1) \quad S^n = 1$$

$$(2) \quad T^2 = 1$$

$$(3) \quad (ST)^{n-1} = 1$$

$$(4) \quad (S^{-1}TST)^3 = 1$$

$$(5) \quad (S^{-k}TS^kT)^2 = 1$$

$$k = 2, 3, \dots, n-2$$

on peut se contenter de considérer les relations (5) pour lesquelles $k = 2, 3, \dots$,

$\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$ suivant que n est pair ou impair. De plus, on peut éliminer une

des relations restantes: soit la relation (4), soit une quelconque des relations (5), à condition de conserver la relation (5) pour $k = 2$:

$$(S^{-2}TS^2T)^2 = 1$$

Ainsi le groupe symétrique de degré n peut être défini de façon abstraite par un système de $\frac{n}{2} + 2$ ou de $\frac{n-1}{2} + 2$ relations caractéristiques selon que n est pair ou impair. En particulier, pour le groupe symétrique de degré six, il existe un système de cinq relations caractéristiques, ce qui est conforme au théorème 4.

VII. CONCLUSION

Soit $\mathbf{G}$ un groupe d'ordre fini, engendré par deux éléments fondamentaux S et T . Nous donnons, dans le présent travail, l'exposé d'une méthode qui permet d'établir un système de relations caractéristiques du groupe $\mathbf{G}$. Nous démontrons que toute relation $g(S,T) = 1$ liant S et T est une conséquence des relations $f(S,T) = 1$ obtenues en reconstituant le groupe $\mathbf{G}$ à partir de ses éléments générateurs S et T .

Pour l'étude des relations caractéristiques du groupe symétrique de degré 6, les bases de ce groupe se répartissent en cinq classes, deux bases semblables appartenant à la même classe. Nous prouvons que toute base S,T du groupe $\mathbf{S}_6$ peut être caractérisée par un système de cinq relations et nous donnons un tel système pour les 163 bases d'un système complet de bases indépendantes de ce groupe. Chaque base appartenant soit à la classe IV, soit à la classe V, peut être caractérisée par cinq relations indépendantes.

Enfin, nous démontrons que le système donné par Moore pour caractériser le groupe symétrique de degré n est surabondant. Nous déterminons quelles sont les relations indispensables et quelles sont les relations qui sont superflues.

RÉPERTOIRE

Définitions

Nº 1	page 9
Nº 2	page 11
Nº 3	page 18
Nº 4	page 18
Nº 5	page 19
Nº 6	page 19
Nº 7	page 21
Nº 8	page 60
Nº 9	page 60
Nº 10	page 83

Remarques

Nº 1	page 11
Nº 2	page 11
Nº 3	page 18
Nº 4	page 25
Nº 5	page 26
Nº 6	page 26
Nº 7	page 26
Nº 8	page 60
Nº 9	page 62
Nº 10	page 63
Nº 11	page 63
Nº 12	page 63
Nº 13	page 63
Nº 14	page 64
Nº 15	page 65
Nº 16	page 68
Nº 17	page 69
Nº 18	page 71
Nº 19	page 72
Nº 20	page 89

Théorèmes

Nº 1	page 53
Nº 2	page 60
Nº 3	page 65
Nº 4	page 67
Nº 5	page 67
Nº 6	page 86
Nº 7	page 87
Nº 8	page 89

Lemmes

Nº 1	page 88
Nº 2	page 88

Corollaires

Nº 1	page 87
Nº 2	page 87
Nº 3	page 89
Nº 4	page 91

Tableaux

I	pages 23–24
II	pages 65–66
III	page 66
IV	pages 66–67
V	pages 73–82

BIBLIOGRAPHIE

- (1) Bourbaki, N.
Algèbre, chapitre I.
Hermann, Paris 1942.
- (2) Burnside, W.
Theory of Groups of Finite Order.
Cambridge 1911 (2^e édition).
- (3) Dubreil, P.
Algèbre, tome I.
Gauthier-Villars, Paris 1954.
- (4) Jordan, C.
Traité des substitutions.
Paris 1870.
- (5) Klein, F.
Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom
fünften Grade.
Teubner, Leipzig 1884.
- (6) Netto, E.
Substitutionentheorie und ihre Anwendungen auf die Algebra.
Teubner, Leipzig 1882.
- (7) Serret, J.-A.
Algèbre, tome II.
Gauthier-Villars, Paris 1928 (7^e édition).
- (8) van der Waerden, B.-L.
Moderne Algebra, tome I.
Springer-Verlag, Berlin 1950 (3^e édition).

- (9) Burckhardt, H.
Endliche Diskrete Gruppen.
Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften, tome I, A.6.
- (10) Burnside, W.
Note on the Symmetric Group.
Proc. Lond. Math. Soc. Vol. XXVIII, 1896-97.
- (11) Burnside, W.
Note on the Symmetric Group.
Mess. of Math. Vol. XXX, 1901.
- (12) Cayley, A.
Collected Mathematical Papers 2, 1889.
- (13) van Dyck, W.
Gruppentheoretische Studien.
Math. Ann. Bd. XX, 1882.
- (14) van Dyck, W.
Gruppentheoretische Studien II.
Math. Ann. Bd. XXII, 1883.
- (15) Hamilton, W.-R.
Icosian Calculus.
Proc. of Roy. Ir. Ac. Vol. VI, 1853-57.
- (16) Hölder, O.
Bildung zusammengesetzter Gruppen.
Math. Ann. Bd. XLVI, 1895.
- (17) Hoyer, P.
Verallgemeinerung zweier Sätze aus der Theorie der Substitutionen-
gruppen.
Math. Ann. Bd. XLVI, 1895.
- (18) Hoyer, P.
Über Definition und Behandlung transitiver Gruppen.
J. reine und ang. Math. Bd. 124, 1902.
- (19) Miller, G.-A.
Abstract Definition of all the Substitution Groups whose Degrees do not
exceed Seven.
Amer. J. Math. Vol. XXIII, 1911.

- (20) Moore, E.-H.
Concerning the Abstract Groups of Order $k!$ and $\frac{1}{2} k!$ Holohedrally
Isomorphic with the Symmetric and the Alternating Substitution-
Groups on k letters.
Proc. Lond. Math. Soc. Vol. XXVIII, 1896-97.
- (21) Netto, E.
Über die Bildung abstrakter Gruppen aus zwei Elementen.
J. reine und ang. Math. Vol. 128, 1905.
- (22) Piccard, S.
Sur les bases du groupe symétrique et les couples de substitutions qui
engendrent un groupe régulier.
Mémoires de l'Université de Neuchâtel, tome 19, 1946.
- (23) Piccard, S.
Sur les bases du groupe symétrique II.
Librairie Vuibert, Paris 1948.
- (24) Piccard, S.
Relations caractéristiques des bases du groupe symétrique.
Mathematica XXIII, 1947-48.
- (25) Piccard, S.
Quelques problèmes de la théorie des substitutions.
Actes Soc. Helv. Sc. Nat. Lugano, 1953.
- (26) Piccard, S.
Les relations caractéristiques des bases du groupe alterné.
Actes Soc. Helv. Sc. Nat. Altdorf, 1954.
- (27) Piccard, S.
Les relations caractéristiques des bases du groupe symétrique.
Comptes rendus. Paris, t. 240, p. 1751-1754.

ABRÉVIATIONS

Proc. Lond. Math. Soc.:	Proceedings of the London Mathematical Society.
Mess. of Math.:	Messenger of Mathematics.
Math. Ann. Bd.:	Mathematische Annalen, Volume.
Proc. of Roy. Ir. Ac.:	Proceedings of the Royal Irish Academy.
J. reine und ang. Math.:	Journal für die reine und angewandte Mathematik.

TABLE DES MATIÈRES

I. Introduction	page 7
II. Historique	page 9
III. Les bases du groupe symétrique	page 17
IV. Etude de quelques bases du groupe S_6 et de leurs relations caractéristiques	page 21
Etude de la base S_8, T_8	page 27
V. Répartition en classes des bases du groupe S_6	page 59
VI. Indépendance des relations caractéristiques	page 83
VII. Conclusion	page 93
Répertoire	page 95
Bibliographie	page 97

